

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung in die Stichprobentheorie und in die Stichprobenverteilung</b>	<b>1</b>
1.1	Stichproben	1
1.1.1	Zufallsstichproben	2
1.1.2	Stichprobenfunktionen	4
1.1.3	Warum Zufallsstichproben?	7
1.2	Stichprobenarten	8
1.2.1	Einfache Zufallsstichprobe	8
1.2.2	Geschichtete Stichprobe (stratified sample)	8
1.2.3	Proportionale Stichprobe	9
1.2.4	Optimale Stichprobe	11
1.2.5	Kostenoptimale Stichprobe	12
1.2.6	Klumpenstichprobe (cluster sample)	12
1.2.7	Mehrstufige Stichprobe	13
1.3	Stichprobenverteilungen	15
1.3.1	Schätzfunktionen von Stichproben	16
1.3.2	Stichprobenverteilungen von $\bar{X}$	17
1.3.3	Die Momente der Stichprobenverteilung von $\bar{X}$	18
1.3.4	Stichprobenverteilung eines Anteils $\pi$	19
<b>2</b>	<b>Schätztheorie</b>	<b>21</b>
2.1	Einführung in die statistische Schätzung	21
2.2*	Eigenschaften von Schätzern	22
2.2.1	Erwartungstreue bzw. Unverzerrtheit (unbiasedness)	22
2.2.2	Effizienz (efficiency)	23
2.2.3*	Konsistenz (consistency)	24
2.3	Intervall-Schätzung	25
2.3.1	Konfidenzintervalle für $\mu$ , wenn $\sigma^2$ bekannt ist	26
2.3.2	Konfidenzintervall für die Differenz zweier Mittelwerte (für grosse Stichproben)	29
2.3.3	Konfidenzintervall für einen Anteil $\pi$ einer Grundgesamtheit (für grosse Stichproben)	30
2.3.4	Konfidenzintervalle für die Differenz zweier Anteile (für grosse Stichproben)	31

2.3.5*	Konfidenzintervalle für den Median: Variable Konfidenzniveaus . . . . .	33
2.3.6	Konfidenzintervall für Median und Quantile: Indexmethode . . . . .	34
2.4	Konfidenzintervalle für die Varianz . . . . .	37
2.4.1	Die $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	38
2.4.2	Die modifizierte $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	39
2.4.3	Optimale HPD-Intervalle für die Varianz einer Normalverteilung . . . . .	41
2.4.4	HPD-Intervall für die Standardabweichung . . . . .	46
2.4.5	Konfidenzintervall für den Variationskoeffizienten . . . . .	47
2.5	Konfidenzintervalle bei unbekannter Varianz . . . . .	48
2.5.1	Die t-Verteilung (Student distribution) . . . . .	48
2.5.2	Konfidenzintervall für $N(\mu, \sigma^2)$ mit unbekannter Varianz $\sigma^2$ . . . . .	51
2.5.3	Konfidenzintervalle für die Differenz von Mittelwerten zweier Stichproben . . . . .	53
2.5.4	Gebundene Stichproben (paired samples, paired two samples for the mean) . . . . .	56
2.5.5	Konfidenzintervalle bei endlicher Grundgesamtheit: $n$ aus $N$ . . . . .	57
2.5.6	Konfidenzintervalle mit Endlichkeitskorrektur . . . . .	58
2.6	Quoten und Quotenverhältnisse . . . . .	60
2.6.1	Quoten (Chancenverhältnisse) . . . . .	62
2.6.2	<i>Odds</i> -ratios: Quoten von Chancenverhältnissen . . . . .	64
2.6.3	Das <i>odds</i> -ratio (Quotenverhältnis) in einer 4-Feldertafel . . . . .	66
2.6.4	Konfidenzintervall des <i>ln-odds</i> -ratio . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Bayes-Normalverteilungsmodelle</b> . . . . .	<b>71</b>
3.1	Bayes'sche Inferenz . . . . .	71
3.1.1	Bayes'sche Inferenz im Normalverteilungsmodell . . . . .	72
3.1.2	HPD-Intervalle . . . . .	73
3.2	Mittelwertschätzung bei bekannter Varianz . . . . .	75
3.2.1	Bayes-Inferenz im $N(\mu, \sigma^2)$ Modell mit Hilfe der hypothetischen Stichprobengröße . . . . .	78
3.3	Bayes-Inferenz für die Differenz von Mittelwerten . . . . .	81
3.3.1	Wenn bekannt ist, dass $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ . . . . .	81
3.3.2	Wenn $\sigma_X^2$ und $\sigma_Y^2$ gänzlich unbekannt sind . . . . .	82
3.4	Bayes-Inferenz für die Varianz, wenn $\mu$ bekannt ist . . . . .	84
3.4.1	Bayes-Inferenz für die Standardabweichung $\sigma$ . . . . .	87
3.5	Bayes-Inferenz für Mittelwert und Varianz . . . . .	88
3.6	Bayes-Inferenz für den Median . . . . .	92
3.6.1	Bayes-Inferenz für Quantile . . . . .	94

<b>4</b>	<b>Das Beta-Binomial-Modell</b>	<b>95</b>
4.1	Die Beta-Verteilung . . . . .	95
4.2	Die Bayes'sche Anteilsschätzung . . . . .	96
4.3	HPD-Intervalle für die Beta(a,b) - Verteilung . . . . .	98
4.4	Elizitation einer Beta-a-priori-Verteilung . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Hypothesen-Tests</b>	<b>105</b>
5.1	Signifikanz-Test . . . . .	105
5.1.1	Diskussion: Signifikanztest . . . . .	107
5.1.2	Herleitung der Sensitivität und Spezifität in der Medizin	108
5.1.3	Durchführung von Signifikanz-Tests . . . . .	109
5.2	Mittelwerttest . . . . .	110
5.2.1	Mittelwerttest (z-Test) : $\sigma^2$ bekannt . . . . .	110
5.2.2	Mittelwerttest ( $\sigma^2$ bekannt) mit p-Werten . . . . .	112
5.2.3	Mittelwerttest: Kritischer Bereich . . . . .	112
5.2.4	Mittelwerttest (t-Test): $\sigma^2$ unbekannt . . . . .	114
5.3	Anteilstest: $n$ gross . . . . .	116
5.3.1	Anteilstest (z-Test) : „Standard-Version“ . . . . .	116
5.3.2	Anteilstest: p-Werte . . . . .	118
5.3.3	Anteilstest: Kritischer Bereich . . . . .	119
5.4	Test auf Differenzen von Lagemasszahlen . . . . .	121
5.4.1	z-Test: Differenzen zweier Anteile für grosse Stichproben	121
5.4.2	Differenz zweier Mittelwerte: $\sigma^2$ bekannt . . . . .	122
5.4.3	t-Test: Differenz zweier Mittelwerte: $\sigma^2$ unbekannt, aber gleich $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ . . . . .	124
5.4.4	t-Test: Differenz zweier Mittelwerte für $\sigma_1^2$ und $\sigma_2^2$ un- bekannt und verschieden, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (Behrens-Fisher- Problem) . . . . .	126
5.4.5	t-Test: Differenz zweier Mittelwerte für gebundene Stichproben . . . . .	129
5.4.6	Signifikanztest der ln-odds-ratios . . . . .	130
5.5	Der $\chi^2$ -Test . . . . .	132
5.5.1	Freiheitsgrade des $\chi^2$ -Test . . . . .	135
5.5.2	Signifikanztest in der Vierfeldertafel . . . . .	136
5.5.3	Unabhängigkeit in Kontingenztafeln . . . . .	139
5.5.4	Der $\chi^2$ -Test in Kontingenztafeln . . . . .	140
5.6	Die Gütefunktion eines Tests (bzw. die OC-Kurve) . . . . .	141
5.6.1	Die OC-Kurve im Normalverteilungstest . . . . .	143
5.6.2	Der kritische Bereich (Critical Region) im Binomialtest	144
5.6.3	p-Wert und Sternchen-Signifikanz . . . . .	145
5.7*	Multiple Tests . . . . .	145
5.7.1	Die Bonferroni-Ungleichung . . . . .	145

<b>6</b>	<b>Bayes-Tests</b>	<b>149</b>
6.1	Einleitung . . . . .	149
6.1.1	Ein- und zweiseitige Bayes'sche Tests: . . . . .	149
6.2	Allgemeine Vorgehensweise . . . . .	152
6.3*	Die Herleitung der posteriori Wahrscheinlichkeit $p_{**}$ . . . . .	154
6.4	Einfacher Standard Bayes-Anteilstest . . . . .	155
6.4.1	Zweiseitiger Bayes-Test . . . . .	155
6.4.2	Einseitiger Bayes-Anteilstest . . . . .	158
6.5	Bayes-Test: Mittelwert einer Normalverteilung . . . . .	159
6.5.1	Zweiseitiger Test bei bekannter Varianz . . . . .	159
6.5.2	Einseitiger Bayes-Test bei bekannter Varianz . . . . .	161
6.5.3	Variante: Bayes-Test mit hypothetischer Stichproben- grösse . . . . .	163
6.5.4	Das LINDLEY-Paradoxon . . . . .	164
6.6	Einseitiger Bayes-Test bei unbekannter Varianz . . . . .	166
6.7	Standard Bayes-Test in einer 4-Felder-Tafel . . . . .	168
6.8	Bayes-Test auf Korrelation . . . . .	171
6.9	Bayes-Test für Differenzen . . . . .	172
6.9.1	Anteilsdifferenzen . . . . .	172
6.9.2	Mittelwertdifferenzen (Varianzen unbekannt, aber gleich $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ) . . . . .	175
6.9.3	Mittelwertdifferenzen ( $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ unbekannt: WELCH- Approximation der Behrens-Verteilung) . . . . .	177
6.10	Bayes-Test einer Varianz . . . . .	180
<b>7</b>	<b>Verteilungsfreie Tests</b>	<b>183</b>
7.1	Signifikanztests von Lagemassen . . . . .	184
7.2	Vorzeichentest auf den Median oder „Mediantest“ . . . . .	185
7.2.1	Vorzeichentest auf Quantile . . . . .	186
7.2.2	Die Bayes-Version des Vorzeichentests . . . . .	187
7.3	Test auf Regellosigkeit (Runs Test) . . . . .	190
7.4	Vorzeichenrangtest auf den Median oder „Test auf ein Sym- metriezentrum“ . . . . .	193
7.5	WILCOXON Rangsummen-Test auf Gleichheit zweier Vertei- lungen . . . . .	197
7.5.1	Äquivalenz von „WILCOXON Rangsummentest“ und „MANN-WHITNEY-U-Test“ . . . . .	200
7.6	Streuungsvergleich mit dem SIEGEL-TUKEY-Test . . . . .	201
7.7	Trendtests . . . . .	203
7.7.1	Der Vorzeichen Trend-Test (Vorzeichentest von COX und STUART) . . . . .	203
7.7.2	Heteroskedastischer Trendtest . . . . .	206
7.8	Test auf repräsentative Stichprobe . . . . .	207

<b>8</b>	<b>Bestimmung des Stichprobenumfanges</b>	<b>211</b>
8.1	Stichprobenplanung für Schätzintervalle . . . . .	211
8.1.1	Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ , $\sigma^2$ bekannt, unendliche Grundgesamtheit . . . . .	211
8.1.2	Bayes'sche Stichprobenplanung . . . . .	212
8.1.3	Binomialverteilung (unendliche Grundgesamtheit) . . . . .	213
8.1.4	Stichprobenumfang für die Differenz von Anteilen . . . . .	215
8.2	Planung bei endlicher Grundgesamtheit . . . . .	216
8.2.1	Endliche Grundgesamtheit im Normalverteilungsmodell . . . . .	217
8.2.2	Binomialverteilung $Bin(n, \pi)$ , endliche Grundgesamtheit, Ziehen ohne Zurücklegen . . . . .	218
8.3	Stichprobenplanung für Tests . . . . .	221
8.3.1	Planung von $n$ beim Mittelwerttest bei gegebenen $\alpha$ - und $\beta$ -Fehler . . . . .	221
8.3.2	Binomialtest bei gegebenen $\beta$ -Fehler . . . . .	223
8.3.3	Differenz zweier Mittelwerte bei gegebenem $\beta$ -Fehler . . . . .	225
<b>9</b>	<b>Varianzanalyse</b>	<b>227</b>
9.1	Ein-Weg-ANOVA . . . . .	227
9.1.1	Fragestellung . . . . .	227
9.1.2	Theoretisches Modell . . . . .	228
9.1.3	Streuungszerlegung . . . . .	229
9.1.4	Die ANOVA-Streuungszerlegung . . . . .	230
9.1.5	Signifikanz-Test der Gruppenmittelwerte . . . . .	232
9.2	Die Bayessche Ein-Weg-ANOVA . . . . .	234
9.3	Zwei-Weg-ANOVA . . . . .	236
9.3.1	Fragestellung . . . . .	236
9.3.2	Das theoretische Modell . . . . .	237
9.3.3	Streuungszerlegung . . . . .	238
9.3.4	Signifikanz-Test . . . . .	240
9.4	Bayes Zwei-Weg-ANOVA . . . . .	243
9.4.1	Bayes-Faktoren nach ZELLNER-SIOW (1980) . . . . .	246
9.4.2	Alternative: Bayes-Test über modifizierte F-Werte . . . . .	249
9.4.3	Herleitung der Bayes'schen F-Werte . . . . .	251
9.4.4	Bayes'sche t-Werte . . . . .	252
<b>10</b>	<b>Einfache Regression</b>	<b>253</b>
10.1	Einführung . . . . .	253
10.1.1	Deterministische Beziehung zwischen zwei Variablen . . . . .	253
10.1.2	Statistische Beziehung . . . . .	254
10.1.3	Die Regressionsfunktion in der Grundgesamtheit und in der Stichprobe . . . . .	255
10.1.4	Analyse von Streudiagrammen . . . . .	256
10.2	Das einfache lineare Regressionsmodell . . . . .	258
10.3	Die Kleinste-Quadrate Schätzung . . . . .	259
10.3.1	Das Kleinstquadrate (KQ-)Kriterium . . . . .	259
10.3.2	Eigenschaften der KQ-Regression . . . . .	262

10.4	Standardfehler der Regression . . . . .	263
10.5	Die Streuungserlegung im Regressionsmodell . . . . .	265
	10.5.1 Das Bestimmtheitsmass $R^2$ . . . . .	268
	10.5.2 Die Eigenschaften des Bestimmtheitsmasses $R^2$ . . . . .	268
	10.5.3 Korrelations- und Regressionsbeziehung . . . . .	271
10.6	Der F-Test im Regressionsmodell . . . . .	272
10.7	Statistische Eigenschaften der KQ-Schätzung . . . . .	273
10.8	t-Tests im linearen Regressionsmodell . . . . .	275
	10.8.1 Signifikanztest auf den Anstieg $\beta$ . . . . .	275
	10.8.2 Signifikanztest auf den Achsenabschnitt $\alpha$ . . . . .	276
10.9	Bayes-Test der Regressionskoeffizienten . . . . .	278
	10.9.1 Bayes Test für den Anstieg $\beta$ . . . . .	278
	10.9.2 Bayes-Test für den Achsenabschnitt $\alpha$ . . . . .	280
10.10	Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten . . . . .	284
	10.10.1 Konfidenzintervall für $\alpha$ . . . . .	284
	10.10.2 Konfidenzintervall für $\beta$ . . . . .	284
	10.10.3 Konfidenzintervall für $\sigma^2$ . . . . .	285
	10.10.4 $HPD_\alpha$ -Intervalle für die Residuenvarianz $\sigma_\varepsilon^2$ . . . . .	286
10.11	Test auf Gleichheit zweier Regressionen in 2 Stichproben . . . . .	286
	10.11.1 Signifikanztest auf gleichen Anstieg ( $\beta_1 = \beta_2$ ) . . . . .	287
	10.11.2 Signifikanztest auf gleichen Achsenabschnitt ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) . . . . .	289
<b>11</b>	<b>Mehrfachregression</b> . . . . .	<b>291</b>
11.1	Das multiple Regressionsmodell . . . . .	291
	11.1.1 Bildungsgesetz der Normalgleichungen . . . . .	292
11.2	Die 3-Variablen Regression . . . . .	292
	11.2.1 Konfidenzintervalle für die Regressionskoeffizienten . . . . .	295
	11.2.2 Konfidenzintervall für einen Wert auf der Regressionsgeraden . . . . .	297
11.3	Das Bestimmtheitsmass $R^2$ und die ANOVA . . . . .	297
	11.3.1 Die Bayes'sche ANOVA im Regressionsmodell . . . . .	299
	11.3.2 Das Korrigierte $R^2$ . . . . .	300
11.4	Die funktionale Form des Regressionsmodells . . . . .	301
	11.4.1 Die Cobb-Douglas Produktions-Funktion . . . . .	301
	11.4.2 Der Bayestest der Regressionskoeffizienten . . . . .	302
	11.4.3 Anstieg und Elastizität . . . . .	303
	11.4.4 Test eines linearen Modells gegen ein log-log (lineares) Modell . . . . .	304
11.5	Bayes- und F-Test für lineare Restriktionen . . . . .	306
	11.5.1 Bayes-Test auf zusätzliche Regressoren . . . . .	307
	11.5.2 F-Test auf zusätzliche Regressoren . . . . .	310
11.6	Regression mit Dummy-Variablen . . . . .	313
	11.6.1 Dummy-Regression: Staatsanleihen . . . . .	316
	11.6.2 Berechnung der Varianz des Achsenabschnitts in der Dummy-Regression . . . . .	317
	11.6.3 Test auf Ausreisser . . . . .	317
11.7	Spezifikationsfehler im Regressionsmodell . . . . .	319

11.7.1	Zuwenige Regressoren . . . . .	319
11.7.2	Zuviele Regressoren . . . . .	320
<b>12</b>	<b>Trendmodelle</b>	<b>321</b>
12.1	Exponentielles Wachstum . . . . .	321
12.1.1	Wachstumsraten . . . . .	322
12.1.2	Regression und exponentielles Wachstum . . . . .	324
12.2	Trend-Schätzung und Prognose . . . . .	325
12.3	Wachstumsraten . . . . .	328
12.4	OLS-Schätzung bei zentrierten Regressoren . . . . .	329
12.5	Prognoseintervalle . . . . .	331
12.6*	MSE-Prognosen . . . . .	333
12.6.1	Prognosevergleich mit NAIV <sup>2</sup> . . . . .	333
12.7*	Korrelation . . . . .	334
12.8*	Die partielle Korrelation . . . . .	337
<b>13</b>	<b>Modelldiagnose</b>	<b>339</b>
13.1	Residuenanalyse: Graphische Methode . . . . .	340
13.2	Autokorrelation in den Residuen . . . . .	341
13.2.1	Das Problem . . . . .	341
13.2.2	Der DURBIN-WATSON (DW)-Test . . . . .	342
13.2.3	Der Bayes-Test auf Autokorrelation . . . . .	344
13.2.4*	Korrektur der Autokorrelation . . . . .	345
13.3	GOLDFELD-QUANDT-Test auf Heteroskedastizität . . . . .	347
13.3.1	Bayes-Test auf die Gleichheit zweier Standardabweichungen . . . . .	351
13.3.2	Bayesscher GOLDFELD-QUANDT-Test . . . . .	351
13.4	Das Quantil-Quantil (Q-Q) Plot . . . . .	352
13.5	Ein Stufenplan für statistische Analysen . . . . .	353
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>355</b>
<b>A</b>	<b>Tabellen</b>	<b>357</b>
A.1	Das griechische Alphabet . . . . .	357
A.2	Einige wichtige Konfidenzintervalle . . . . .	358
A.2.1	Klassische Konfidenzintervalle . . . . .	358
A.2.2	HPD-Intervalle bei nicht-informativer a-priori Verteilung . . . . .	360
A.2.3	HPD-Intervalle bei informativer a-priori Verteilung . . . . .	361
A.3	Gleichverteilte Zufallszahlen . . . . .	362
A.4	Logarithmierte Fakultäten . . . . .	363
A.5	Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der standardisierten Normalverteilung $N(0,1)$ . . . . .	365
A.6	Verteilungsfunktion $F_\nu(x)$ der standardisierten $t_\nu$ -Verteilung . . . . .	366
A.7	Standardisierte $\chi^2$ -Verteilungen . . . . .	370
A.7.1	Verteilungsfunktion der $\chi_\nu^2$ -Verteilung . . . . .	370
A.7.2	HPD-Intervalle der $\chi_\nu^2$ -Verteilung . . . . .	371

A.7.3	Verteilungsfunktion der inversen $\chi_\nu^2$ -Verteilung ( $\chi_\nu^{-2}$ -Verteilung) . . . . .	372
A.7.4	HPD-Intervalle der inversen $\chi_\nu^2$ -Verteilung ( $\chi_\nu^{-2}$ -Verteilung) . . . . .	373
A.7.5	HPD-Intervalle der inversen $\chi_\nu$ -Verteilung ( $\chi_\nu^{-1}$ -Verteilung) . . . . .	374
A.8	Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktionen einiger Binomialverteilungen $\text{Bin}(n, p)$ . . . . .	375
A.9	Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktionen einiger Poisson-Verteilungen $\text{Po}(\lambda)$ . . . . .	376
A.10	Quantile der $F_{m,n}$ -Verteilung . . . . .	377
	A.10.1 0.95-Quantile der $F_{m,n}$ -Verteilung . . . . .	377
	A.10.2 0.99-Quantile der $F_{m,n}$ -Verteilung . . . . .	378
A.11	Quantile der Behrens-Verteilung . . . . .	379
A.12	Beta-Verteilung $\text{Beta}(a, b)$ . . . . .	380
	A.12.1 Formen der Beta-Verteilung $\text{Beta}(a, b)$ . . . . .	380
	A.12.2 Verschiedene Beta-Verteilungen gleicher Modalwerte . . . . .	381
	A.12.3 HPD-Intervallgrenzen für die Beta-Verteilung $\text{Beta}(a, b)$ . . . . .	383
A.13	Theoretische HPD-Intervallgrenzen für Quantile $p$ . . . . .	389
A.14	Kritische Werte für den U-Test . . . . .	395
A.15	Kritische Werte für den WILCOXON-Paardifferenzentest . . . . .	396
A.16	Kritische Werte des DURBIN-WATSON-Tests . . . . .	397
<b>B</b>	<b>Rechenregeln</b> . . . . .	<b>401</b>
	B.1 Rechnen mit Summenzeichen . . . . .	401
	B.2 Rechnen mit Matrizen . . . . .	403
	<b>Index</b> . . . . .	<b>407</b>
<b>C</b>	<b>Im Text verwendete Symbole</b> . . . . .	<b>411</b>
	C.1 Abkürzungen . . . . .	411
	C.2 Masszahlen . . . . .	413
	C.3 Funktionen . . . . .	413
	C.4 Verteilungen . . . . .	414
	C.5 Symbole und Abkürzungen . . . . .	414
	C.6 Regeln für Symbole . . . . .	415