

# Inhalt

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Vorwort</b>  | <b>v</b>  |
| <b>Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| 1. Zur Entwicklung der Zahlen und der Algebra . . .                             | 1         |
| 2. Ein erster Blick auf die Zahlbereiche . . . . .                              | 2         |
| 3. Zur Gliederung der Inhalte im Einzelnen . . . . .                            | 6         |
| 4. Einige Schlussbemerkungen . . . . .  | 10        |
| 5. Voraussetzungen für den Leser . . . . .                                      | 11        |
| <b>I Die natürlichen Zahlen und ihre Teilbarkeitslehre</b>                      | <b>13</b> |
| 1. Die natürlichen Zahlen . . . . .   | 13        |
| 2. Teilbarkeit und Primzahlen . . . . .   | 21        |
| 3. Der Fundamentalsatz der elementaren<br>Zahlentheorie . . . . .               | 30        |
| 4. Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes<br>gemeinsames Vielfaches . . . . . | 35        |
| 5. Division mit Rest . . . . .  | 42        |
| <b>II Systematisierung durch die Algebra:<br/>Elemente der Gruppentheorie</b>   | <b>45</b> |
| 1. Halbgruppen und Monoide . . . . .  | 45        |
| 2. Gruppen und Untergruppen . . . . .   | 50        |
| 3. Gruppenhomomorphismen . . . . .  | 58        |
| 4. Nebenklassen und Normalteiler . . . . .                                      | 62        |
| 5. Faktorgruppen und Homomorphiesatz . . . . .                                  | 72        |
| 6. Konstruktion von Gruppen aus regulären<br>Halbgruppen . . . . .              | 79        |
| 7. Die ganzen Zahlen . . . . .  | 86        |

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>III</b> | <b>Systematisierung durch die Algebra:</b>                              |            |
|            | <b>Elemente der Ringtheorie</b>   | <b>93</b>  |
| 1.         | Die ganzen Zahlen und ihre Teilbarkeitslehre . . . . .                  | 93         |
| 2.         | Ringe und Unterringe . . . . .  | 100        |
| 3.         | Ringhomomorphismen, Ideale und Faktorringe . . . . .                    | 108        |
| 4.         | Körper und Schiefkörper . . . . .                                       | 119        |
| 5.         | Konstruktion von Körpern aus Integritätsbereichen . . . . .             | 122        |
| 6.         | Die rationalen Zahlen . . . . .   | 130        |
| 7.         | ZPE-Ringe, Hauptidealringe und Euklidische Ringe . . . . .              | 133        |
| <b>IV</b>  | <b>Die reellen Zahlen</b>   | <b>147</b> |
| 1.         | Dezimalbruchentwicklung rationaler Zahlen . . . . .                     | 147        |
| 2.         | Konstruktion der reellen Zahlen . . . . .                               | 152        |
| 3.         | Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen . . . . .                        | 167        |
| 4.         | Äquivalente Charakterisierungen der Vollständigkeit . . . . .           | 172        |
| 5.         | Die reellen Zahlen und die Zahlengerade . . . . .                       | 179        |
| 6.         | Der axiomatische Standpunkt . . . . .                                   | 185        |
| <b>V</b>   | <b>Komplexe Zahlen und Quaternionen, Algebraizität und Transzendenz</b> | <b>191</b> |
| 1.         | Komplexe Zahlen . . . . .   | 191        |
| 2.         | Hamiltonsche Quaternionen . . . . .                                     | 197        |
| 3.         | Algebraische und transzendente Zahlen . . . . .                         | 200        |
| 4.         | Transzendenz von $e$ . . . . .  | 206        |
| <b>VI</b>  | <b>Kongruenzen</b>  | <b>217</b> |
| 1.         | Restklassenringe . . . . .  | 217        |
| 2.         | Lösen linearer Kongruenzen . . . . .                                    | 220        |
| 3.         | Quadratische Reste . . . . .  | 233        |
| 4.         | Das quadratische Reziprozitätsgesetz . . . . .                          | 253        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Ausgewählte Literatur</b>   | <b>261</b> |
| 1. Literatur zur elementaren Zahlentheorie . . . . .                 | 261        |
| 2. Literatur zur Algebra . . . . .                                   | 262        |
| 3. Literatur zum Zahl- und Ziffernbegriff . . . . .                  | 263        |
| 4. Literatur zur Didaktik der Algebra und<br>Zahlentheorie . . . . . | 263        |
| <b>Index</b>   | <b>265</b> |