

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	11
2.1	Definition	11
2.2	Eigenschaften	16
2.3	Parametrische Copula-Familien	24
2.3.1	Bivariate Copula-Familien	24
2.3.2	Multivariate Copula-Familien	32
2.4	Copulas und Abhängigkeitsmaße	35
2.4.1	Kendall's Tau	38
2.4.2	Spearman's Rho	39
2.4.3	Multivariate Erweiterungen	44
3	Archimedische Copulas	49
3.1	Definition	50
3.2	Eigenschaften	53
3.2.1	Algebraische Eigenschaften	53
3.2.2	Ordnung	54
3.2.3	Verteilungsfunktion einer archimedischen Copula	57
3.2.4	Kendall's Tau für die archimedische Copula-Familie	58
3.3	Spezielle archimedische Copula-Familien	59
3.3.1	Cook-Johnson-Copula	60
3.3.2	Gumbel-Copula	62
3.3.3	Frank-Copula	63

3.3.4	Ali-Mikhael-Haq-Copula	65
3.4	Mixture-Darstellung archimedischer Copulas	66
4	Simulation	71
4.1	Allgemeine Simulationsalgorithmen	72
4.1.1	Die bedingte Inversionsmethode	72
4.1.2	Simulationsmethode von Marshall und Olkin	76
4.2	Spezielle Simulationsalgorithmen für die Klasse der archimedischen Copulas	76
4.2.1	Die bedingte Inversionsmethode für archimedische Copulas	77
4.2.2	Simulationsalgorithmus unter Verwendung der Verteilungsfunktion K einer archimedischen Copula	79
4.2.3	Simulation archimedischer Copulas ausgehend von der Mixture-Darstellung	80
4.2.4	Illustration	81
5	Statistische Inferenz I - Schätzmethoden für Copula-Modelle	85
5.1	Parametrische Schätzung	87
5.1.1	Exakte Maximum-Likelihood-Schätzung	89
5.1.2	Methode der Inferenzfunktionen für die Randverteilungen	90
5.2	Semiparametrische Schätzung	92
5.2.1	Semiparametrische Maximum-Likelihood-Schätzung	92
5.2.2	Schätzung mit Hilfe copula-basierter Abhängigkeitsmaße	97
5.3	Nichtparametrische Schätzung	100
5.3.1	Die empirische Copula von Deheuvels	101
5.3.2	Nichtparametrische Kernschätzung	104
6	Statistische Inferenz II - Tests auf Güte der Anpassung	113
6.1	Überblick über die Literatur	116
6.2	Ausgewählte Tests auf Güte der Anpassung	117
6.2.1	Tests auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitsintegraltransformation	118

6.2.2	Anpassungstests, die auf dem Prozeß von Kendall basieren	126
6.2.3	Anpassungstests auf der Grundlage des empirischen Copula-Prozesses	132
6.2.4	Sonstige Ansätze	135
6.3	Ein neuer χ^2 -Test auf Anpassungsgüte für archimedische Copulas	138
6.3.1	Testproblem	138
6.3.2	Vorgehensweise und Teststatistik	138
6.3.3	Approximation der Verteilung der Teststatistik	140
6.3.4	Simulationsstudie zur Untersuchung der Eigenschaften des Tests in kleinen Stichproben	142
6.3.5	Empirische Illustration	144
7	Hierarchische Archimedische Copulas	153
7.1	Allgemeine Modellierung	155
7.2	Herleitung der Dichte	168
7.3	Simulation	176
7.4	Schätzung hierarchischer archimedischer Copulas	185
7.4.1	Semiparametrische Maximum-Likelihood-Methode	186
7.4.2	Semiparametrische hierarchische ML-Methode	186
7.4.3	Momenten-Methode auf Grundlage von Kendall's Tau	189
7.4.4	Monte-Carlo-Simulation zur Überprüfung der Eigenschaften der Schätzverfahren im HAC-Modell	196
7.5	Empirische Illustration	200
7.6	Zusammenfassung und Ausblick	206
8	Schlußbemerkung	213
A	Generatoren für ausgewählte archimedische Copula-Familien	219
A.1	Cook-Johnson-Familie	219
A.2	Gumbel-Familie	220
A.3	Frank-Familie	221
A.4	Ali-Mikhael-Haq-Familie	221

B Laplace-Transformierte	223
C Mixture-Darstellung von Marshall und Olkin	225
C.1 Univariater Fall	225
C.2 Bivariater Fall	226
C.3 Multivariater Fall	227
Literaturverzeichnis	231

Tabellenverzeichnis

6.1	Fehlerwahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art des Tests	143
6.2	Güte des Tests	145
6.3	Deskriptive Statistiken der logarithmierten Renditen	146
6.4	Empirische Kendall's Tau-Matrix der Branche Versicherung	147
6.5	Empirische Kendall's Tau-Matrix der Branche Industrie	147
6.6	Empirische Kendall's Tau-Matrix der Branche Versorgung	148
6.7	Anpassungstests für archimedische Copulas - Branche Versicherung	148
6.8	Anpassungstests für archimedische Copulas - Branche Industrie . .	148
6.9	Anpassungstests für archimedische Copulas - Branche Versorgung .	149
6.10	Anpassungstests für archimedische Copulas - Gesamtportfolio . . .	150
7.1	Simulationsergebnisse der drei semiparametrischen Schätzverfahren	198
7.2	Verzerrung der geschätzten Parametervektoren nach den drei semi- parametrischen Schätzverfahren	199
7.3	Eigenwerte der Differenzmatrix der MSE-Matrizen für die Parame- terschätzvektoren der beiden Copula-Modelle	199
7.4	Rechenzeiten der Monte-Carlo-Simulationsstudie	200
7.5	Empirische Kendall's Tau-Matrix für das Gesamtportfolio	201

Abbildungsverzeichnis

2.1	Grafische Darstellung der drei speziellen Copulas W , Π und M im bivariaten Fall	19
2.2	Grafische Darstellung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm für die bivariate Gauß-Copula mit Parameter $r = 0.5$ bzw. Kendall's $\tau = 1/3$	27
2.3	Grafische Darstellung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm für die bivariate Gauß-Copula mit Parameter $r = 0.89$ bzw. Kendall's $\tau = 0.7$	27
2.4	Grafische Darstellung der Dichte der bivariaten Normalverteilung und des zugehörigen Konturdiagramms mit $r = 0.5$	28
2.5	Grafische Darstellung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm für die bivariate t-Copula mit Parameter $r = 0.5$ bzw. Kendall's $\tau = 1/3$ und $\nu = 3$	29
2.6	Grafische Darstellung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm für die bivariate t-Copula mit Parameter $r = 0.89$ bzw. Kendall's $\tau = 0.7$ und $\nu = 3$	29
2.7	Grafische Abbildung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm einer bivariaten Verteilung mit Clayton-Copula und als univariate Randverteilungen eine $N(0, 1)$ - und eine t_4 -Verteilung	30
2.8	Grafische Abbildung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm einer bivariaten Verteilung mit Gumbel-Copula und als univariate Randverteilungen eine $N(0, 1)$ - und eine t_4 -Verteilung	31

3.1	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Clayton-Copula mit Parameter $\theta = 1$ bzw. $\tau = 1/3$.	61
3.2	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Clayton-Copula mit Parameter $\theta = 4.67$ bzw. $\tau = 0.7$	61
3.3	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Gumbel-Copula mit Parameter $\theta = 1.5$ bzw. $\tau = 1/3$	62
3.4	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Gumbel-Copula mit Parameter $\theta = 3.33$ bzw. $\tau = 0.7$	63
3.5	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Frank-Copula mit Parameter $\theta = 3.31$ bzw. $\tau = 1/3$	64
3.6	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Frank-Copula mit Parameter $\theta = 11.5$ bzw. $\tau = 0.7$	65
4.1	Punktwolken der Realisationen zweier Copulas aus der Gumbel-Familie mit Parametern $\tau = 1/3$ (linkes Feld) und $\tau = 0.7$ (rechtes Feld)	82
4.2	Punktwolken der Realisationen zweier Copulas aus der Clayton-Familie mit Parametern $\tau = 1/3$ (linkes Feld) und $\tau = 0.7$ (rechtes Feld)	82
4.3	Punktwolken der Realisationen zweier Copulas aus der Frank-Familie mit Parametern $\tau = 1/3$ (linkes Feld) und $\tau = 0.7$ (rechtes Feld)	83
4.4	Paarweise Punktwolken der Realisationen einer drei-dimensionalen Gumbel-Copula mit Parameter $\theta = 1.5$ bzw. $\tau = 1/3$	84
5.1	Univariate Kerndichteschätzung innerhalb eines Intervalls. Quelle: Schmid und Trede (2006, S. 106)	107
5.2	Grafische Illustration der bivariaten Spiegelbild-Modifikation. Quelle: Schmid und Trede (2006, S. 107)	108
7.1	Struktur einer drei-dimensionalen hierarchischen archimedischen Copula auf zwei Ebenen	163
7.2	Struktur einer vier-dimensionalen hierarchischen archimedischen Copula auf zwei Ebenen	164

7.3	Baumdiagramm für die 9-dimensionale hierarchische archimedische Copula auf $L = 3$ Ebenen	166
7.4	Paarweise Darstellung der Realisationen der drei-dimensionalen Cook-Johnson-Copula auf zwei Ebenen aus (7.7), mit Parametern $\theta_{1,1} = 3$ und $\theta_{2,1} = 1$	183
7.5	Punktwolken zweier bivariater Randverteilungsfunktionen der vier-dimensionalen Gumbel-Copula auf zwei Ebenen aus (7.8), mit Parametern $\theta_{1,1} = 2$, $\theta_{1,1} = 2.5$ und $\theta_{2,1} = 1.5$	184
7.6	Struktur der sieben-dimensionalen hierarchischen archimedischen Copula auf zwei Ebenen	203