

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>11</b>
2.1	Definition . . . . .	11
2.2	Eigenschaften . . . . .	16
2.3	Parametrische Copula-Familien . . . . .	24
2.3.1	Bivariate Copula-Familien . . . . .	24
2.3.2	Multivariate Copula-Familien . . . . .	32
2.4	Copulas und Abhängigkeitsmaße . . . . .	35
2.4.1	Kendall's Tau . . . . .	38
2.4.2	Spearman's Rho . . . . .	39
2.4.3	Multivariate Erweiterungen . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Archimedische Copulas</b>	<b>49</b>
3.1	Definition . . . . .	50
3.2	Eigenschaften . . . . .	53
3.2.1	Algebraische Eigenschaften . . . . .	53
3.2.2	Ordnung . . . . .	54
3.2.3	Verteilungsfunktion einer archimedischen Copula . . . . .	57
3.2.4	Kendall's Tau für die archimedische Copula-Familie . . . . .	58
3.3	Spezielle archimedische Copula-Familien . . . . .	59
3.3.1	Cook-Johnson-Copula . . . . .	60
3.3.2	Gumbel-Copula . . . . .	62
3.3.3	Frank-Copula . . . . .	63

3.3.4	Ali-Mikhael-Haq-Copula . . . . .	65
3.4	Mixture-Darstellung archimedischer Copulas . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Simulation</b>	<b>71</b>
4.1	Allgemeine Simulationsalgorithmen . . . . .	72
4.1.1	Die bedingte Inversionsmethode . . . . .	72
4.1.2	Simulationsmethode von Marshall und Olkin . . . . .	76
4.2	Spezielle Simulationsalgorithmen für die Klasse der archimedischen Copulas . . . . .	76
4.2.1	Die bedingte Inversionsmethode für archimedische Copulas	77
4.2.2	Simulationsalgorithmus unter Verwendung der Verteilungsfunktion $K$ einer archimedischen Copula . . . . .	79
4.2.3	Simulation archimedischer Copulas ausgehend von der Mixture-Darstellung . . . . .	80
4.2.4	Illustration . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Statistische Inferenz I - Schätzmethoden für Copula-Modelle</b>	<b>85</b>
5.1	Parametrische Schätzung . . . . .	87
5.1.1	Exakte Maximum-Likelihood-Schätzung . . . . .	89
5.1.2	Methode der Inferenzfunktionen für die Randverteilungen . . . . .	90
5.2	Semiparametrische Schätzung . . . . .	92
5.2.1	Semiparametrische Maximum-Likelihood-Schätzung . . . . .	92
5.2.2	Schätzung mit Hilfe copula-basierter Abhängigkeitsmaße . . . . .	97
5.3	Nichtparametrische Schätzung . . . . .	100
5.3.1	Die empirische Copula von Deheuvels . . . . .	101
5.3.2	Nichtparametrische Kernschätzung . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Statistische Inferenz II - Tests auf Güte der Anpassung</b>	<b>113</b>
6.1	Überblick über die Literatur . . . . .	116
6.2	Ausgewählte Tests auf Güte der Anpassung . . . . .	117
6.2.1	Tests auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitsintegraltransformation . . . . .	118

6.2.2	Anpassungstests, die auf dem Prozeß von Kendall basieren . . . . .	126
6.2.3	Anpassungstests auf der Grundlage des empirischen Copula-Prozesses . . . . .	132
6.2.4	Sonstige Ansätze . . . . .	135
6.3	Ein neuer $\chi^2$ -Test auf Anpassungsgüte für archimedische Copulas . . . . .	138
6.3.1	Testproblem . . . . .	138
6.3.2	Vorgehensweise und Teststatistik . . . . .	138
6.3.3	Approximation der Verteilung der Teststatistik . . . . .	140
6.3.4	Simulationsstudie zur Untersuchung der Eigenschaften des Tests in kleinen Stichproben . . . . .	142
6.3.5	Empirische Illustration . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Hierarchische Archimedische Copulas</b> . . . . .	<b>153</b>
7.1	Allgemeine Modellierung . . . . .	155
7.2	Herleitung der Dichte . . . . .	168
7.3	Simulation . . . . .	176
7.4	Schätzung hierarchischer archimedischer Copulas . . . . .	185
7.4.1	Semiparametrische Maximum-Likelihood-Methode . . . . .	186
7.4.2	Semiparametrische hierarchische ML-Methode . . . . .	186
7.4.3	Momenten-Methode auf Grundlage von Kendall's Tau . . . . .	189
7.4.4	Monte-Carlo-Simulation zur Überprüfung der Eigenschaften der Schätzverfahren im HAC-Modell . . . . .	196
7.5	Empirische Illustration . . . . .	200
7.6	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	206
<b>8</b>	<b>Schlußbemerkung</b> . . . . .	<b>213</b>
<b>A</b>	<b>Generatoren für ausgewählte archimedische Copula-Familien</b> . . . . .	<b>219</b>
A.1	Cook-Johnson-Familie . . . . .	219
A.2	Gumbel-Familie . . . . .	220
A.3	Frank-Familie . . . . .	221
A.4	Ali-Mikhael-Haq-Familie . . . . .	221

<b>B Laplace-Transformierte</b>	<b>223</b>
<b>C Mixture-Darstellung von Marshall und Olkin</b>	<b>225</b>
C.1 Univariater Fall . . . . .	225
C.2 Bivariater Fall . . . . .	226
C.3 Multivariater Fall . . . . .	227
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>231</b>

# Tabellenverzeichnis

6.1	Fehlerwahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art des Tests . . . . .	143
6.2	Güte des Tests . . . . .	145
6.3	Deskriptive Statistiken der logarithmierten Renditen . . . . .	146
6.4	Empirische Kendall's Tau-Matrix der Branche Versicherung . . . . .	147
6.5	Empirische Kendall's Tau-Matrix der Branche Industrie . . . . .	147
6.6	Empirische Kendall's Tau-Matrix der Branche Versorgung . . . . .	148
6.7	Anpassungstests für archimedische Copulas - Branche Versicherung	148
6.8	Anpassungstests für archimedische Copulas - Branche Industrie . .	148
6.9	Anpassungstests für archimedische Copulas - Branche Versorgung .	149
6.10	Anpassungstests für archimedische Copulas - Gesamtportfolio . . .	150
7.1	Simulationsergebnisse der drei semiparametrischen Schätzverfahren	198
7.2	Verzerrung der geschätzten Parametervektoren nach den drei semi- parametrischen Schätzverfahren . . . . .	199
7.3	Eigenwerte der Differenzmatrix der MSE-Matrizen für die Parame- terschätzvektoren der beiden Copula-Modelle . . . . .	199
7.4	Rechenzeiten der Monte-Carlo-Simulationsstudie . . . . .	200
7.5	Empirische Kendall's Tau-Matrix für das Gesamtportfolio . . . . .	201

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Grafische Darstellung der drei speziellen Copulas $W$ , $\Pi$ und $M$ im bivariaten Fall . . . . .	19
2.2	Grafische Darstellung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm für die bivariate Gauß-Copula mit Parameter $r = 0.5$ bzw. Kendall's $\tau = 1/3$ . . . . .	27
2.3	Grafische Darstellung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm für die bivariate Gauß-Copula mit Parameter $r = 0.89$ bzw. Kendall's $\tau = 0.7$ . . . . .	27
2.4	Grafische Darstellung der Dichte der bivariaten Normalverteilung und des zugehörigen Konturdiagramms mit $r = 0.5$ . . . . .	28
2.5	Grafische Darstellung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm für die bivariate t-Copula mit Parameter $r = 0.5$ bzw. Kendall's $\tau = 1/3$ und $\nu = 3$ . . . . .	29
2.6	Grafische Darstellung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm für die bivariate t-Copula mit Parameter $r = 0.89$ bzw. Kendall's $\tau = 0.7$ und $\nu = 3$ . . . . .	29
2.7	Grafische Abbildung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm einer bivariaten Verteilung mit Clayton-Copula und als univariate Randverteilungen eine $N(0, 1)$ - und eine $t_4$ -Verteilung . . . . .	30
2.8	Grafische Abbildung der Dichte mit zugehörigem Konturdiagramm einer bivariaten Verteilung mit Gumbel-Copula und als univariate Randverteilungen eine $N(0, 1)$ - und eine $t_4$ -Verteilung . . . . .	31

3.1	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Clayton-Copula mit Parameter $\theta = 1$ bzw. $\tau = 1/3$ .	61
3.2	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Clayton-Copula mit Parameter $\theta = 4.67$ bzw. $\tau = 0.7$	61
3.3	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Gumbel-Copula mit Parameter $\theta = 1.5$ bzw. $\tau = 1/3$	62
3.4	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Gumbel-Copula mit Parameter $\theta = 3.33$ bzw. $\tau = 0.7$	63
3.5	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Frank-Copula mit Parameter $\theta = 3.31$ bzw. $\tau = 1/3$	64
3.6	Grafische Darstellung der Dichte und ihres zugehörigen Konturdiagramms für die Frank-Copula mit Parameter $\theta = 11.5$ bzw. $\tau = 0.7$	65
4.1	Punktwolken der Realisationen zweier Copulas aus der Gumbel-Familie mit Parametern $\tau = 1/3$ (linkes Feld) und $\tau = 0.7$ (rechtes Feld)	82
4.2	Punktwolken der Realisationen zweier Copulas aus der Clayton-Familie mit Parametern $\tau = 1/3$ (linkes Feld) und $\tau = 0.7$ (rechtes Feld)	82
4.3	Punktwolken der Realisationen zweier Copulas aus der Frank-Familie mit Parametern $\tau = 1/3$ (linkes Feld) und $\tau = 0.7$ (rechtes Feld)	83
4.4	Paarweise Punktwolken der Realisationen einer drei-dimensionalen Gumbel-Copula mit Parameter $\theta = 1.5$ bzw. $\tau = 1/3$	84
5.1	Univariate Kerndichteschätzung innerhalb eines Intervalls. Quelle: Schmid und Tiede (2006, S. 106)	107
5.2	Grafische Illustration der bivariaten Spiegelbild-Modifikation. Quelle: Schmid und Tiede (2006, S. 107)	108
7.1	Struktur einer drei-dimensionalen hierarchischen archimedischen Copula auf zwei Ebenen	163
7.2	Struktur einer vier-dimensionalen hierarchischen archimedischen Copula auf zwei Ebenen	164

7.3	Baumdiagramm für die 9-dimensionale hierarchische archimedische Copula auf $L = 3$ Ebenen . . . . .	166
7.4	Paarweise Darstellung der Realisationen der drei-dimensionalen Cook-Johnson-Copula auf zwei Ebenen aus (7.7), mit Parametern $\theta_{1,1} = 3$ und $\theta_{2,1} = 1$ . . . . .	183
7.5	Punktwolken zweier bivariater Randverteilungsfunktionen der vier-dimensionalen Gumbel-Copula auf zwei Ebenen aus (7.8), mit Parametern $\theta_{1,1} = 2$ , $\theta_{1,1} = 2.5$ und $\theta_{2,1} = 1.5$ . . . . .	184
7.6	Struktur der sieben-dimensionalen hierarchischen archimedischen Copula auf zwei Ebenen . . . . .	203