

INHALTSVERZEICHNIS

| | Seite |
|---|-------|
| 1 Darstellung von Zahlen und Fehleranalyse | 1 |
| 1.1 Definition von Fehlergrößen | 1 |
| 1.2 Dezimaldarstellung von Zahlen | 2 |
| 1.3 Fehlerquellen | 6 |
| 1.3.1 Der Verfahrensfehler | 6 |
| 1.3.2 Der Eingangsfehler | 6 |
| 1.3.3 Der Rechnungsfehler | 9 |
| 2 Numerische Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen | 11 |
| 2.1 Aufgabenstellung und Anwendungsempfehlungen | 11 |
| 2.2 Definitionen und Sätze über Nullstellen | 12 |
| 2.3 Allgemeines Iterationsverfahren | 12 |
| 2.3.1 Konstruktionsmethode und Definition | 12 |
| 2.3.2 Existenz von Lösungen und deren Eindeutigkeit | 14 |
| 2.3.3 Konvergenz eines Iterationsverfahrens, Fehlerabschätzungen, Rechnungsfehler | 15 |
| 2.3.4 Praktische Durchführung | 18 |
| 2.4 Konvergenzordnung eines Iterationsverfahrens | 20 |
| 2.5 Newtonsche Verfahren | 22 |
| 2.5.1 Das Newtonsche Verfahren für einfache Nullstellen, gedämpftes Newton-Verfahren | 22 |
| 2.5.2 Das Newtonsche Verfahren für mehrfache Nullstellen; das modifizierte Newtonsche Verfahren | 24 |
| 2.6 Regula falsi | 26 |
| 2.6.1 Regula falsi für einfache Nullstellen | 26 |
| 2.6.2 Modifizierte Regula falsi für mehrfache Nullstellen | 27 |
| 2.6.3 Primitivform der Regula falsi | 27 |
| 2.7 Verfahren von Steffensen | 28 |
| 2.7.1 Das Verfahren von Steffensen für einfache Nullstellen | 28 |
| 2.7.2 Das modifizierte Steffensen-Verfahren für mehrfache Nullstellen | 28 |

| | Seite |
|--|-------|
| 2.8 Einschlußverfahren | 29 |
| 2.8.1 Bisektionsverfahren | 29 |
| 2.8.2 Das Pegasus-Verfahren | 31 |
| 2.8.3 Verfahren von Anderson-Björck | 32 |
| 2.8.4 Verfahren von King und Anderson-Björck-King | 35 |
| 2.9 Effizienz der Verfahren und Entscheidungshilfen | 35 |
| 3 Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen | 37 |
| 3.1 Vorbemerkungen | 37 |
| 3.2 Das Hornerschema | 38 |
| 3.2.1 Das einfache Horner-Schema für reelle Argumentwerte | 38 |
| 3.2.2 Das einfache Horner-Schema für komplexe Argumentwerte | 39 |
| 3.2.3 Das vollständige Horner-Schema für reelle Argumentwerte | 41 |
| 3.2.4 Anwendungen | 43 |
| 3.3 Methoden zur Bestimmung sämtlicher Lösungen algebraischer Gleichungen | 44 |
| 3.3.1 Vorbemerkungen, Überblick und Entscheidungshilfen für die Wahl der Methode | 44 |
| 3.3.2 Das Verfahren von Muller | 45 |
| 3.3.3 Das Verfahren von Bauhuber | 48 |
| 3.3.4 Das Verfahren von Jenkins und Traub | 50 |
| 4 Direkte Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme | 51 |
| 4.1 Aufgabenstellung | 51 |
| 4.2 Definitionen und Sätze | 52 |
| 4.3 Lösbarkeitsbedingungen für ein lineares Gleichungssystem | 56 |
| 4.4 Prinzip der direkten Methoden | 57 |
| 4.5 Der Gauß-Algorithmus | 58 |
| 4.5.1 Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche | 58 |
| 4.5.2 Pivotsuche | 62 |
| 4.5.3 Gauß-Algorithmus als Dreieckszerlegung | 62 |
| 4.5.4 Gauß-Algorithmus für Systeme mit mehreren rechten Seiten | 65 |

| | Seite |
|---|-------|
| 4.6 Matrizeninversion mit dem Gauß-Algorithmus | 66 |
| 4.7 Verfahren für Systeme mit symmetrischen Matrizen | 67 |
| 4.7.1 Systeme mit symmetrischer, streng regulärer Matrix | 67 |
| 4.7.2 Systeme mit symmetrischer, positiv definiter Matrix, Cholesky-Verfahren | 68 |
| 4.8 Das Gauß-Jordan-Verfahren | 71 |
| 4.9 Bestimmung der zu einer Matrix inversen Matrix mit dem Austauschverfahren | 72 |
| 4.10 Gleichungssysteme mit tridiagonalen Matrizen | 75 |
| 4.10.1 Systeme mit tridiagonaler Matrix | 75 |
| 4.10.2 Systeme mit symmetrischer, tridiagonaler, positiv definiter Matrix | 77 |
| 4.11 Gleichungssysteme mit zyklisch tridiagonalen Matrizen | 79 |
| 4.11.1 Systeme mit zyklisch tridiagonaler Matrix | 79 |
| 4.11.2 Systeme mit symmetrischer, zyklisch tridiagonaler Matrix | 81 |
| 4.12 Gleichungssysteme mit fünfdiagonalen Matrizen | 83 |
| 4.12.1 Systeme mit fünfdiagonalen Matrizen | 83 |
| 4.12.2 Systeme mit symmetrischer, fünfdiagonaler, positiv definiter Matrix | 85 |
| 4.13 Gleichungssysteme mit Bandmatrizen | 87 |
| 4.14 Lösung überbestimmter linearer Gleichungssysteme mit Householdertransformation | 93 |
| 4.15 Fehler, Kondition und Nachiteration | 97 |
| 4.15.1 Fehler und Kondition | 97 |
| 4.15.2 Möglichkeiten zur Konditionsverbesserung | 99 |
| 4.15.3 Nachiteration | 100 |
| 4.16 Gleichungssysteme mit Blockmatrizen | 102 |
| 4.16.1 Vorbemerkungen | 102 |
| 4.16.2 Gauß-Algorithmus für Blocksysteme | 103 |
| 4.16.3 Gauß-Algorithmus für tridiagonale Blocksysteme | 104 |
| 4.16.4 Weitere Block-Verfahren | 105 |
| 4.17 Entscheidungshilfen für die Auswahl des Verfahrens | 106 |

| | Seite |
|---|-------|
| 5 Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme | 108 |
| 5.1 Vorbemerkungen | 108 |
| 5.2 Vektor- und Matrixnormen | 108 |
| 5.3 Das Iterationsverfahren in Gesamtschritten | 110 |
| 5.4 Das Iterationsverfahren in Einzelschritten oder das Gauß-Seidelsche Iterationsverfahren | 114 |
| 5.5 Relaxation beim Gesamtschrittverfahren | 115 |
| 5.6 Relaxation beim Einzelschrittverfahren | 116 |
| 6 Systeme nichtlinearer Gleichungen | 118 |
| 6.1 Allgemeines Iterationsverfahren | 118 |
| 6.2 Spezielle Iterationsverfahren | 123 |
| 6.2.1 Newtonsche Verfahren für nichtlineare Systeme | 123 |
| 6.2.1.1 Das quadratisch konvergente Newton-Verfahren | 123 |
| 6.2.1.2 Gedämpftes Newton-Verfahren | 124 |
| 6.2.2 Regula falsi für nichtlineare Systeme | 126 |
| 6.2.3 Das Verfahren des stärksten Abstiegs (Gradientenverfahren) | 127 |
| 6.2.4 Das Verfahren von Brown | 129 |
| 6.3 Entscheidungshilfen für die Auswahl der Methode | 129 |
| 7 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen | 130 |
| 7.1 Definitionen und Aufgabenstellungen | 130 |
| 7.2 Diagonalähnliche Matrizen | 132 |
| 7.3 Das Iterationsverfahren nach v. Mises | 133 |
| 7.3.1 Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes und des zugehörigen Eigenvektors | 133 |
| 7.3.2 Bestimmung des betragskleinsten Eigenwertes | 138 |
| 7.3.3 Bestimmung weiterer Eigenwerte und Eigenvektoren | 139 |
| 7.4 Konvergenzverbesserung mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten im Falle Hermitescher Matrizen | 139 |
| 7.5 Das Verfahren von Krylov | 140 |
| 7.5.1 Bestimmung der Eigenwerte | 141 |
| 7.5.2 Bestimmung der Eigenvektoren | 143 |

| | Seite |
|---|------------|
| 7.6 Bestimmung der Eigenwerte positiv definiten, symmetrischer, tridiagonaler Matrizen mit Hilfe des QD-Algorithmus | 143 |
| 7.7 Transformation auf Hessenbergform, LR- und QR-Verfahren | 145 |
| 7.7.1 Transformation einer Matrix auf obere Hessenbergform | 145 |
| 7.7.2 LR-Verfahren | 147 |
| 7.7.3 QR-Verfahren | 148 |
| 7.8 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix nach dem Verfahren von Martin, Parlett, Peters, Reinsch und Wilkinson | 149 |
| 7.9 Entscheidungshilfen | 151 |
| 8 Lineare und nichtlineare Approximation | 152 |
| 8.1 Lineare Approximation | 153 |
| 8.1.1 Approximationsaufgabe und beste Approximation | 153 |
| 8.1.2 Kontinuierliche lineare Approximation im quadratischen Mittel | 156 |
| 8.1.3 Diskrete lineare Approximation im quadratischen Mittel | 160 |
| 8.1.3.1 Normalgleichungen für den diskreten linearen Ausgleich | 160 |
| 8.1.3.2 Diskreter Ausgleich durch algebraische Polynome unter Verwendung orthogonaler Polynome | 163 |
| 8.1.3.3 Lineare Regression, Ausgleich durch lineare algebraische Polynome | 165 |
| 8.1.3.4 Householdertransformation zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems | 166 |
| 8.1.4 Approximation von Polynomen durch Tschebyscheff-Polynome | 168 |
| 8.1.4.1 Beste gleichmäßige Approximation, Definition | 169 |
| 8.1.4.2 Approximation durch Tschebyscheff-Polynome | 170 |
| 8.1.5 Approximation periodischer Funktionen | 176 |
| 8.1.5.1 Approximation periodischer Funktionen im quadratischen Mittel | 177 |
| 8.1.5.2 Trigonometrische Interpolation | 177 |
| 8.1.5.3 Komplexe diskrete Fourier-Transformation (FFT) | 180 |

| | Seite |
|--|-------|
| 8.2 Nichtlineare Approximation | 182 |
| 8.2.1 Transformationsmethode beim nichtlinearen Ausgleich | 182 |
| 8.2.2 Nichtlinearer Ausgleich im quadratischen Mittel | 184 |
| 8.3 Entscheidungshilfen | 185 |
| 9 Polynomiale und rationale Interpolation | 186 |
| 9.1 Aufgabenstellung | 186 |
| 9.2 Interpolationsformeln von Lagrange | 187 |
| 9.2.1 Lagrangesche Formel für beliebige Stützstellen | 187 |
| 9.2.2 Lagrangesche Formel für äquidistante Stützstellen | 188 |
| 9.3 Das Interpolationsschema von Aitken für beliebige Stützstellen | 189 |
| 9.4 Inverse Interpolation nach Aitken | 191 |
| 9.5 Interpolationsformeln von Newton | 192 |
| 9.5.1 Newtonsche Formel für beliebige Stützstellen | 192 |
| 9.5.2 Newtonsche Formel für äquidistante Stützstellen | 194 |
| 9.6 Restglied der Interpolation und Aussagen zur Abschätzung und Schätzung des Interpolationsfehlers | 195 |
| 9.7 Interpolationsformeln von Lagrange bei Funktionen mehrerer Veränderlichen | 197 |
| 9.8 Rationale Interpolation | 199 |
| 9.9 Entscheidungshilfen für die Auswahl des zweckmäßigen Interpolationsverfahrens | 203 |
| 10 Interpolierende Polynomsplines zur Konstruktion glatter Kurven | 204 |
| 10.1 Polynomsplines dritten Grades | 204 |
| 10.1.1 Definition der Splinefunktionen | 205 |
| 10.1.2 Berechnung der nichtparametrischen kubischen Splines | 207 |
| 10.1.3 Berechnung der parametrischen kubischen Splines | 212 |
| 10.1.4 Kombinierte interpolierende Splines | 214 |
| 10.1.5 Konvergenz und Fehlerabschätzung interpolierender kubischer Splines | 220 |

| | Seite |
|---|-------|
| 10.2 Hermite-Splines fünften Grades | 221 |
| 10.2.1 Definition der Hermite-Splines | 221 |
| 10.2.2 Berechnung der nichtparametrischen Hermite-Splines | 223 |
| 10.2.3 Berechnung der parametrischen Hermite-Splines | 227 |
| 10.3 Entscheidungshilfen zur Auswahl der geeigneten Spline- methode zur Konstruktion glatter Kurven bzw. Flächen | 230 |
| 11 Polynomiale Ausgleichssplines dritten Grades zur Konstruktion glatter Kurven | 234 |
| 11.1 Problemstellung | 234 |
| 11.2 Definition der Splinefunktionen | 235 |
| 11.3 Berechnung der nichtparametrischen kubischen Ausgleichs- splines | 236 |
| 11.4 Berechnung der parametrischen kubischen Ausgleichssplines | 244 |
| 12 Zweidimensionale Splines, Bezier-Splines, Oberflächensplines | 245 |
| 12.1 Interpolierende zweidimensionale Polynom-Splines dritten Grades zur Konstruktion glatter Flächen | 245 |
| 12.2 Kubische und bikubische interpolierende und approximierende Bezier-Splines | 255 |
| 12.2.1 Kubische Bezier-Splines zur Konstruktion glatter Kurven und Kurven mit Knick | 256 |
| 12.2.2 Approximierende bikubische Bezier-Splines zur Konstruktion glatter Flächen | 259 |
| 12.2.3 Modifizierte (interpolierende) kubische Bezier- Splines | 266 |
| 12.3 Zweidimensionale interpolierende Oberflächensplines | 267 |
| 13 Numerische Differentiation | 270 |
| 13.1 Aufgabenstellung | 270 |
| 13.2 Differentiation mit Hilfe eines Interpolationspolynoms | 270 |
| 13.3 Differentiation mit Hilfe interpolierender kubischer Polynom-Splines | 275 |
| 13.4 Differentiation nach dem Romberg-Verfahren | 275 |
| 13.5 Entscheidungshilfen | 277 |

| | Seite |
|---|-------|
| 14 Numerische Quadratur | 278 |
| 14.1 Vorbemerkungen | 278 |
| 14.2 Konstruktion von Interpolationsquadraturformeln | 280 |
| 14.3 Newton-Cotes-Formeln | 282 |
| 14.3.1 Die Sehnentrapezformel | 283 |
| 14.3.2 Die Simpsonsche Formel | 285 |
| 14.3.3 Die 3/8-Formel | 287 |
| 14.3.4 Weitere Newton-Cotes-Formeln | 289 |
| 14.3.5 Zusammenfassung zur Fehlersuche von Newton-Cotes-Formeln | 291 |
| 14.4 Quadraturformeln von Maclaurin | 292 |
| 14.4.1 Die Tangententrapezformel | 292 |
| 14.4.2 Weitere Maclaurin-Formeln | 294 |
| 14.5 Die Euler-Maclaurin-Formeln | 296 |
| 14.6 Tschebyscheffsche Quadraturformeln | 298 |
| 14.7 Quadraturformeln von Gauß | 301 |
| 14.8 Einfache Berechnung von Gewichten und Stützstellen verallgemeinerter Gauß-Quadraturformeln | 305 |
| 14.9 Quadraturformeln von Clenshaw-Curtis | 308 |
| 14.10 Das Verfahren von Romberg | 310 |
| 14.11 Fehlerschätzung und Rechnungsfehler | 312 |
| 14.12 Adaptive Quadraturverfahren | 315 |
| 14.13 Konvergenz der Quadraturformeln | 316 |
| 14.14 Berechnung des Riemannschen Flächenintegrals mit bikubischen Splines | 316 |
| 14.15 Entscheidungshilfen für die Auswahl der geeigneten Methode | 317 |
| 15 Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen | 319 |
| 15.1 Problemstellung | 319 |
| 15.2 Prinzip der numerischen Verfahren | 320 |

| | Seite | |
|----------|---|-----|
| 15.3 | Einschrittverfahren | 322 |
| 15.3.1 | Das Polygonzugverfahren von Euler-Cauchy | 322 |
| 15.3.2 | Das verbesserte Euler-Cauchy-Verfahren | 323 |
| 15.3.3 | Praediktor-Korrektor-Verfahren von Heun | 323 |
| 15.3.4 | Explizite Runge-Kutta-Verfahren | 325 |
| 15.3.4.1 | Konstruktion von Runge-Kutta-Verfahren | 325 |
| 15.3.4.2 | Klassisches Runge-Kutta-Verfahren | 326 |
| 15.3.4.3 | Zusammenstellung expliziter Runge-Kutta-Formeln | 328 |
| 15.3.4.4 | Einbettungsformeln | 333 |
| 15.3.5 | Implizite Runge-Kutta-Verfahren | 336 |
| 15.3.6 | Gemeinsame Darstellung aller Einschrittverfahren | 339 |
| 15.3.7 | Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung | 340 |
| 15.3.7.1 | Fehlerschätzung | 340 |
| 15.3.7.2 | Methoden zur automatischen Schrittweitensteuerung, adaptive Anfangswertproblemlöser | 342 |
| 15.4 | Mehrschrittverfahren | 344 |
| 15.4.1 | Prinzip der Mehrschrittverfahren | 344 |
| 15.4.2 | Das explizite Verfahren von Adams-Bashforth | 346 |
| 15.4.3 | Das Praediktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Moulton | 348 |
| 15.4.4 | Verfahren von Adams-Störmer | 353 |
| 15.4.5 | Fehlerschätzungsformeln für Mehrschrittverfahren | 354 |
| 15.4.6 | Rechnungsfehler für Ein- und Mehrschrittverfahren | 356 |
| 15.5 | Extrapolationsverfahren von Bulirsch-Stoer-Gragg | 357 |
| 15.6 | Stabilität | 360 |
| 15.6.1 | Vorbemerkungen | 360 |
| 15.6.2 | Stabilität der Differentialgleichungen | 361 |
| 15.6.3 | Stabilität des numerischen Verfahrens | 361 |
| 15.7 | Steife Differentialgleichungssysteme | 366 |
| 15.7.1 | Problemstellung | 366 |

| | Seite |
|---|-------|
| 15.7.2 Kriterien für Steifheit eines Systems | 366 |
| 15.7.3 Das Verfahren von Gear zur Integration steifer Systeme | 367 |
| 15.8 Entscheidungshilfen bei der Wahl des Verfahrens | 373 |
| 16 Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen | 378 |
| 16.1 Problemstellung | 378 |
| 16.2 Zurückführung des Randwertproblems auf ein Anfangswertproblem | 379 |
| 16.2.1 Randwertprobleme für nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung | 379 |
| 16.2.2 Randwertprobleme für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung | 382 |
| 16.2.3 Mehrzielverfahren | 383 |
| 16.3 Differenzenverfahren | 387 |
| 16.3.1 Das gewöhnliche Differenzenverfahren | 387 |
| 16.3.2 Differenzenverfahren höherer Näherung | 393 |
| 16.3.3 Iterative Auflösung der linearen Gleichungssysteme zu speziellen Randwertproblemen | 396 |
| 16.3.4 Lineare Eigenwertprobleme | 396 |
| Anhang: FORTRAN 77- Programme | 399 |
| Verzeichnis der Programme | 400 |
| Vorwort zum Anhang | 405 |
| Programme | 408 |
| Literaturverzeichnis | 760 |
| Literatur zu weiteren Themengebieten | 774 |
| Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen | 774 |
| Methode der Finiten Elemente | 775 |
| Sachregister | 777 |