

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
Inhaltsverzeichnis	5
Notation	8
1. Einleitung	13
1.1 Integralgleichungen	13
1.2 Grundlagen aus der Analysis	15
1.2.1 Stetige Funktionen	15
1.2.2 Lipschitz-stetige Funktionen	15
1.2.3 Hölder-stetige Funktionen	16
1.3 Grundlagen aus der Funktionalanalysis	17
1.3.1 Banach-Räume	17
1.3.2 Banach-Räume $C^x(I)$, $C_L^k(D)$, $\hat{C}^x(D)$	18
1.3.3 Banach-Räume $L^1(D)$, $L^2(D)$, $L^\infty(D)$	19
1.3.4 Dichte Teilräume	20
1.3.5 Banachscher Fixpunktsatz	20
1.3.6 Lineare Operatoren	21
1.3.7 Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit	22
1.3.8 Kompakte Mengen und kompakte Abbildungen	23
1.3.9 Riesz-Schauder-Theorie	25
1.3.10 Hilbert-Räume, Orthogonalräume, Projektionen	26
1.4 Grundlagen aus der Numerischen Mathematik	27
1.4.1 Interpolation	27
1.4.2 Quadratur	31
1.4.3 Kondition von Gleichungssystemen	35
2. Volterrasche Integralgleichungen	37
2.1 Theorie der Volterraschen Integralgleichung 2. Art	37
2.1.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	37
2.1.2 Regularität der Lösung	39
2.2 Numerische Lösung durch Quadraturverfahren	41
2.2.1 Herleitung der Diskretisierung	41
2.2.2 Fehlerabschätzung	42
2.3 Weitere numerische Verfahren	49
2.4 Lineare Volterrasche Integralgleichung vom Faltungstyp	52
2.5 Volterraschen Integralgleichung 1. Art	53
3. Theorie der Fredholmschen Integralgleichung 2. Art	55
3.1 Die Fredholmsche Integralgleichung 2. Art	55
3.2 Der Integraloperator K als kompakter Operator	56
3.2.1 Allgemeines	56
3.2.2 Der Fall $X = C(D)$	58
3.2.3 Der Fall $X = L^2(D)$	60
3.2.4 Der Fall eines unbeschränkten Intervalles I	60
3.3 Endliche Approximierbarkeit des Integraloperators K	61
3.3.1 Konvergenz in der Operatornorm	61
3.3.2 Ausgeartete Kerne	62

3. Theorie der Fredholmschen Integralgleichung 2. Art (Fortsetzung)	
3.4 Bildbereich von K	63
3.4.1 Glatte Kerne $k(x, y)$	63
3.4.2 Das Bild Kf für $f \in C^\lambda(I)$	65
3.4.3 Kerne mit integrierbarer Singularität	67
3.4.4 Kompaktheit	70
3.4.5 Volterrasche Integralgleichung	70
3.4.6 K als Abbildung von $L^\infty(D)$	70
3.5 Lösung der Fredholmschen Integralgleichung 2. Art	71
3.5.1 Existenz und Eindeutigkeit	71
3.5.2 Regularität	71
4. Numerik der Fredholmschen Integralgleichung 2. Art	72
4.1 Allgemeine Überlegungen	72
4.1.1 Notation des semidiskreten Problems	72
4.1.2 Konsistenz und Stabilität	72
4.1.3 Konvergenz	74
4.1.4 Stabilitäts- und Konvergenzsatz	75
4.1.5 Fehlerabschätzungen	76
4.1.6 Konditionszahlen	77
4.2 Diskretisierung durch Kernapproximation	78
4.2.1 Ausgeartete Kerne	78
4.2.2 Aufstellung des Gleichungssystems	79
4.2.3 Kernapproximation durch Interpolation	80
4.2.4 Tensorapproximation von k	81
4.2.5 Beispiele für Kernapproximationen	82
4.2.6 Variante der Kernapproximation	83
4.2.7 Analyse des Gleichungssystems	84
4.2.8 Numerische Beispiele	86
4.3 Projektionsmethoden (allgemein)	88
4.3.1 Unterräume	88
4.3.2 Projektionen	89
4.3.3 Hilfssätze	90
4.3.4 Diskretisierung mittels Projektion	90
4.3.5 Konvergenzuntersuchung	92
4.3.6 Fehlerabschätzung	93
4.4 Kollokationsmethode	95
4.4.1 Definition der Projektion durch Interpolation	95
4.4.2 Aufstellung des Gleichungssystems	95
4.4.3 Beispiele für Interpolationen	97
4.4.4 Kondition des Gleichungssystems	99
4.4.5 Numerische Beispiele	101
4.5 Galerkin-Verfahren	105
4.5.1 Unterraum, Orthogonalprojektion	105
4.5.2 Aufstellung des Gleichungssystems	106
4.5.3 Konvergenz in $L^2(D)$ und $L^\infty(D)$	107
4.5.4 Fehlerabschätzungen	110
4.5.5 Kondition des Gleichungssystems	111
4.5.6 Beispiel: stückweise konstante Funktionen	114
4.5.7 Beispiel: stückweise lineare Funktionen	118
4.5.8 Allgemeine Analyse des Projektionsfehlers	119

4. Numerik der Fredholmschen Integralgleichung 2. Art (Fortsetzung)	
4.5.9 Fortsetzung: stückweise lineare Funktionen	121
4.5.10 Numerische Beispiele	123
4.6 Verschiedene Anmerkungen zu Projektionsverfahren	125
4.6.1 Regularisierung	125
4.6.2 Abschätzungen in schwächeren Norm	126
4.6.3 Das iterierte Verfahren	131
4.6.4 Superkonvergenz	133
4.6.5 Allgemeiner Formulierungen der Projektionsmethode	136
4.6.6 Numerische Quadratur	138
4.6.7 Produktintegration	141
4.7 Diskretisierung durch Quadraturverfahren (Nyström-Methode)	143
4.7.1 Beschreibung des Verfahrens	143
4.7.2 Konvergenzüberlegungen	145
4.7.3 Stabilität	147
4.7.4 Konsistenzordnung	151
4.7.5 Kondition des Gleichungssystems	152
4.7.6 Regularisierung	153
4.7.7 Numerische Beispiele	154
4.7.8 Produktintegration	155
4.8 Ergänzungen	156
4.8.1 Zusammenhang der Diskretisierungsverfahren	156
4.8.2 Methode der Defektkorrektur	158
4.8.3 Extrapolationsverfahren	159
4.8.4 Eigenwertaufgaben	162
4.8.5 Komplementäre Integralgleichungen	167
4.8.6 Nachtrag: Störungssatz zur Stabilität	169
5. Mehrgitterverfahren zur Auflösung des Gleichungssystems bei Integralgleichungen zweiter Art	170
5.1 Vorbemerkungen	170
5.1.1 Notation	170
5.1.2 Direkte Lösung des Gleichungssystems	171
5.1.3 Picard-Iteration	171
5.1.4 Verfahren der konjugierten Gradienten	173
5.2 Stabilität und Konvergenz (diskrete Formulierung)	175
5.2.1 Prolongation und Restriktion	175
5.2.2 Der Banach-Raum Y und die diskreten Räume Y_n	178
5.2.3 Der Interpolations- bzw. Projektionsfehler	180
5.2.4 Konsistenz	180
5.2.5 Stabilität	181
5.2.6 Konvergenz	182
5.3 Die Hierarchie diskreter Probleme	183
5.3.1 Diskretisierungsstufen	183
5.3.2 Prolongationen und Restriktionen	184
5.3.3 Relative Konsistenz	187
5.3.4 Konvergenz	188
5.4 Zweigitterverfahren	189
5.4.1 Der Zweigitteralgorithmus	189
5.4.2 Konvergenzanalyse	190

5. Mehrgitterverfahren (Fortsetzung)	
5.4.3 Rechenaufwand	192
5.4.4 Variante für $A_p \neq I$	194
5.4.5 Numerische Beispiele	195
5.5 Mehrgitterverfahren	197
5.5.1 Algorithmus (Grundversion)	197
5.5.2 Rechenaufwand	199
5.5.3 Konvergenz	200
5.5.4 Numerische Beispiele	204
5.5.5 Varianten des Mehrgitterverfahrens	206
5.6 Geschachtelte Iteration	212
5.6.1 Algorithmus	212
5.6.2 Rechenaufwand	213
5.6.3 Konvergenz	214
5.6.4 Numerische Beispiele	215
5.6.5 Geschachtelte Iteration mit Nyström-Interpolation	216
6. Die Abelsche Integralgleichung	218
6.1 Notation und Anwendungsbeispiele	218
6.1.1 Die Abelsche Integralgl. und ihre Verallgemeinerung	218
6.1.2 Anwendungsbeispiele	218
6.1.3 Uneigentliche Integrale	220
6.2 Eine notwendige Bedingung für eine beschränkte Lösung	223
6.3 Eulersche Integrale	224
6.4 Umkehrung der Abelschen Integralgleichung	226
6.5 Umformung für Kerne $k(x, y) / (x - y)^\lambda$	231
6.6 Numerische Verfahren für die Abelschen Integralgleichung	232
7. Singuläre Integralgleichungen	234
7.1 Der Cauchy-Hauptwert	234
7.1.1 Definition und Eigenschaften	234
7.1.2 Kurvenintegrale	238
7.1.3 Cauchy-Hauptwert für Kurvenintegrale	240
7.1.4 Das Beispiel $f(\zeta) = 1 / (\zeta - z)$	242
7.2 Der Cauchy-Kern	249
7.2.1 Definition und Eigenschaften	249
7.2.2 Regularitätseigenschaften	253
7.2.3 Eigenschaften der erzeugten holomorphen Funktion	255
7.2.4 Darstellung von K^2	263
7.2.5 Das Cauchy-Integral auf dem Einheitskreis	265
7.3 Die singuläre Integralgleichung	267
7.3.1 Der Fall konstanter Koeffizienten	267
7.3.2 Der Fall variabler Koeffizienten	267
7.3.3 Allgemeine singuläre Integralgleichungen	268
7.3.4 Approximation des Cauchy-Integrals auf dem Einheitskreis	269
7.3.5 Approximation des Cauchy-Integrals auf einer beliebigen Kurve Γ	270
7.3.6 Mehrgitterverfahren für Gleichungen spezieller Art	271

7. Singuläre Integralgleichungen (Fortsetzung)

7.4 Anwendung auf das Dirichlet-Problem der Laplace-Gleichung	273
7.4.1 Die Aufgabenstellung im Innenraum	273
7.4.2 Das Doppelschichtpotential	273
7.4.3 Eindeutigkeits- und Darstellungssatz	277
7.4.4 Der Fall eines glatten Randes Γ	279
7.4.5 Das Doppelschichtpotential zur Lösung der Außenraum- aufgabe	280
7.4.6 Die Tangentialableitung des Einfachschichtpotentials	282
7.5 Hypersinguläre Integrale	284

8. Die Integralgleichungsmethode

8.1 Das Einfachschichtpotential	286
8.1.1 Die Singularitätenfunktion	286
8.1.2 Stetigkeit des Einfachschichtpotentials	288
8.1.2.1 Definition	288
8.1.2.2 Oberflächenintegrale	289
8.1.2.3 Uneigentliche Integrale auf Oberflächen	290
8.1.2.4 Folgerungen für das Einfachschichtpotential	291
8.1.3 Ableitungen des Einfachschichtpotential	291
8.1.3.1 Die Normalableitung	291
8.1.3.2 Der Cauchy-Hauptwert für Oberflächenintegrale	296
8.1.3.3 Andere Richtungsableitungen	300
8.1.4 Formulierung der Dirichlet-Randwertaufgabe als Integral- gleichung 1. Art für das Einfachschichtpotential	302
8.1.4.1 Zur Innen- und Außenraumaufgabe der Laplace-Gl.	302
8.1.4.2 Die Integralgleichung erster Art	303
8.1.5 Formulierung der Neumann-Randwertaufgabe als Integral- gleichung 2. Art für das Einfachschichtpotential	305
8.2 Das Doppelschichtpotential	308
8.2.1 Definition	308
8.2.2 Regularitätseigenschaften des Doppelschichtoperators	309
8.2.3 Sprungeigenschaften des Doppelschichtpotentials	312
8.2.4 Weitere Eigenschaften des Doppelschichtpotentials	315
8.2.4.1 Hölder-Stetigkeit	315
8.2.4.2 Potential in der Nähe einer Sprungstelle	316
8.2.4.3 Das Potential der Belegung $f=1$	317
8.2.5 Ableitungen des Doppelschichtpotentials	320
8.2.6 Integralgleichungen mit dem Doppelschichtoperator	324
8.2.6.1 Formulierung der Dirichlet-Randwertaufgabe	324
8.2.6.2 Formulierung der Neumann-Randwertaufgabe	326
8.2.7 Nichtglatte Kurven bzw. Oberflächen	328
8.3 Eine hypersinguläre Integralgleichung	330
8.4 Übersicht: Integralgleichungen für die Laplace-Gleichung	334
8.5 Die Integralgleichungsmethode für andere Differentialgl.	335
8.5.1 Gleichungen zweiter Ordnung	335
8.5.2 Gleichungen höherer Ordnung	336
8.5.3 Systeme von Differentialgleichungen	337

9. Die Randelementmethode	339
9.1 Konstruktion der Randelementmethode	339
9.1.1 Definition der Randelementmethode	339
9.1.2 Galerkin-Verfahren	339
9.1.3 Kollokationsverfahren	340
9.1.4 Konvergenz im kompakten Fall	341
9.1.5 Konvergenz im Falle elliptischer Bilinearformen	341
9.2 Die Randelemente	344
9.2.1 Elemente im zweidimensionalen Fall	344
9.2.2 Geometrische Diskretisierung	345
9.2.3 Elemente im dreidimensionalen Fall	346
9.2.4 Fehlerbetrachtungen	347
9.3 Mehrgitterverfahren	348
9.3.1 Gleichungen zweiter Art	348
9.3.2 Gleichungen erster Art	349
9.4 Integration und Numerische Quadratur	351
9.4.1 Allgemeine Bemerkungen	351
9.4.2 Schwach singuläre Integrale	352
9.4.3 Fast singuläre Integrale	353
9.4.4 Stark singuläre Integrale	355
9.4.5 Behandlung der doppelten Integrale bei der Galerkin-Methode	355
9.5 Verfahren höherer Ordnung	355
9.5.1 Höhere Elementansätze	355
9.5.2 Ein spezielles Verfahren mit flachen Dreieckselementen	356
9.6 Lösung inhomogener Gleichungen	357
9.7 Berechnung des Potentials	358
9.7.1 Auswertung des Potentials	358
9.7.2 Auswertung der Ableitungen	358
9.7.3 Fehlerbetrachtungen	359
9.7.4 Extrapolation	359
9.8 Alternative Matrixdarstellungen (Paneel-Clustering)	359
9.8.1 Die Konstruktion der Cluster	360
9.8.2 Der Clusterbaum	360
9.8.3 Die Clusterentwicklung	361
9.8.4 Zulässige Cluster	362
9.8.5 Zulässige Überdeckungen	362
9.8.6 Matrix-Vektor-Multiplikation	362
Literaturverzeichnis	364
Stichwortverzeichnis	373