

# Inhaltsverzeichnis

Überblick über die Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	1
---	---

## I. Abschnitt

### Grundzüge der Fehlerlehre

§ 1. Fehlerarten, theoretische Mittelwerte und Streuungsmaße . . . . .	6
1.1 Grobe, systematische, zufällige und totale Fehler . . . . .	6
1.2 Der theoretische Mittelwert . . . . .	8
1.3 Die theoretischen Streuungsmaße . . . . .	10
1.4 Zur Berechnung der Streuungsmaße . . . . .	11
§ 2. Der mittlere Fehler von Funktionen unabhängiger Messungsgrößen (Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz) . . . . .	13
2.1 Der Einfluß der Beobachtungsfehler auf Funktionen gemessener Größen	13
2.2 Der relative Fehler einer Funktion gemessener Größen . . . . .	14
2.3 Der mittlere Fehler einer Funktion gegenseitig unabhängiger Messungsgrößen . . . . .	15
§ 3. Empirischer Mittelwert und empirischer mittlerer Fehler bei Beobachtungen gleicher Genauigkeit . . . . .	24
3.1 Wahre und übrigbleibende Fehler . . . . .	24
3.2 Empirischer Mittelwert und empirischer mittlerer Fehler einer ursprünglichen Beobachtung . . . . .	24
3.3 Empirischer mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels direkt beobachteter Messungsgrößen . . . . .	26
§ 4. Empirischer Mittelwert und empirischer mittlerer Fehler bei Beobachtungen verschiedener Genauigkeit . . . . .	29
4.1 Einführen des Gewichts und des allgemeinen arithmetischen Mittels . . . . .	29
4.2 Beziehungen zwischen Gewichten und mittleren Fehlern . . . . .	30
4.3 Die Gewichte von Funktionen direkt beobachteter Messungsgrößen . . . . .	32
4.4 Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit; homogenisierte und standardisierte Beobachtungen . . . . .	33
4.5 Gewichtsreziproke oder Kofaktoren . . . . .	35
§ 5. Empirische mittlere Beobachtungsfehler aus Doppelmessungen . . . . .	38
5.1 Beobachtungspaare gleichen Gewichtes . . . . .	38
5.2 Beobachtungspaare verschiedenen Gewichtes . . . . .	39
§ 6. Fehlerfortpflanzungsgesetze für Beobachtungen mit systematischen Fehleranteilen und für korrelierte Beobachtungen. . . . .	42
6.1 Beobachtungen mit systematischen Fehleranteilen . . . . .	42
6.2 Gegenseitig abhängige oder korrelierte Beobachtungen . . . . .	47
§ 7. Das Gaußsche Fehlergesetz . . . . .	50
7.1 Fehlerhäufigkeit und Fehlerwahrscheinlichkeit . . . . .	50
7.2 Die Fehlerhäufigkeits- und die Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion . . . . .	51

7.3 Die graphische Darstellung von $\varphi(\varepsilon)$ . . . . .	54
7.4 Hagens Ableitung des Fehlergesetzes . . . . .	56
7.5 Fehlergesetz und Beobachtungsreihen. . . . .	60
§ 8. Die fehlertheoretische Begründung und die mittleren Fehler der Genauigkeitsmaße . . . . .	61
8.1 Beziehungen zwischen $\tau$ , $\mu$ , $q$ und $h$ . . . . .	61
8.2 Zur Theorie des Maximalfehlers . . . . .	64
8.3 Der mittlere Fehler eines aus $n$ wahren Fehlern berechneten empirischen mittleren Fehlers . . . . .	65
8.4 Der mittlere Fehler eines aus $n$ übrigbleibenden Fehlern berechneten empirischen mittleren Fehlers . . . . .	67
8.5 Zufallskriterien . . . . .	70

## II. Abschnitt

### Ausgleichung von direkten Beobachtungen

§ 9. Grundprinzip und Formen der Ausgleichungsaufgabe . . . . .	72
9.1 Die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung . . . . .	72
9.2 Das Ausgleichungsprinzip. . . . .	72
9.3 Ausgleichungsverfahren. . . . .	74
§ 10. Ausgleichung direkter Beobachtungen gleicher Genauigkeit (Arithmetisches Mittel) . . . . .	75
§ 11. Ausgleichung direkter Beobachtungen verschiedener Genauigkeit (Allgemeines arithmetisches Mittel). . . . .	78
§ 12. Beobachtungen mit Summengleichung . . . . .	81

## III. Abschnitt

### Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen

§ 13. Einführung in die Methode der vermittelnden Beobachtungen. . . . .	85
§ 14. Aufstellen der Fehlergleichungen . . . . .	87
14.1 Wahl der Unbekannten . . . . .	88
14.2 Lineare Fehlergleichungen . . . . .	88
14.3 Nichtlineare Fehlergleichungen . . . . .	89
§ 15. Aufstellen und Auflösen der Normalgleichungen . . . . .	91
15.1 Aufstellen der Normalgleichungen . . . . .	91
15.2 Auflösen der Normalgleichungen nach dem Gaußschen Algorithmus . . . . .	93
15.3 Übergang auf mehrere Unbekannte. . . . .	94
15.4 Das System der Endgleichungen . . . . .	96
§ 16. Vervollständigung des Algorithmus durch Summen- und $[v\ v]$ -Proben . . . . .	97
16.1 Die Summenproben . . . . .	97
16.2 $v$ -Proben und $[v\ v]$ -Proben . . . . .	99
16.3 Die Schlußprobe. . . . .	102
16.4 Anordnung der Zahlenrechnung . . . . .	102
§ 17. Gewichtskoeffizienten und mittlere Fehler der Unbekannten . . . . .	105
17.1 Herleitung der Gewichtskoeffizienten . . . . .	105
17.2 Berechnung der Gewichtskoeffizienten aus ihren Endgleichungen . . . . .	109
17.3 Gleichzeitige Auflösung von Normal- und Gewichtsgleichungen . . . . .	111
17.4 Die unbestimmte Auflösung. . . . .	112
17.5 Gewichtskoeffizienten bei nur zwei Unbekannten . . . . .	115

§ 18. Mittlere Fehler der beobachteten Größen . . . . .	116
18.1 Ableiten der Fehlerformel . . . . .	116
18.2 Zweite Gaußsche Begründung der Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	118
§ 19. Vermittelnde Beobachtungen verschiedener Genauigkeit . . . . .	120
§ 20. Die Gewichte von Funktionen der Unbekannten . . . . .	123
20.1 Berechnen des Funktionsgewichtes mit Hilfe der Gewichtskoeffizienten . . . . .	123
20.2 Berechnen des Funktionsgewichtes durch Erweitern des ursprünglichen Normalgleichungssystems . . . . .	126
20.3 Gewicht einer Funktion von Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen . . . . .	127
20.4 Freie oder nicht korrelierte Funktionen . . . . .	128
§ 21. Rechenmaschinenlogarithmen . . . . .	130
21.1 Der mechanisierte Gaußsche Algorithmus . . . . .	130
21.2 Der moderne Gaußsche Algorithmus . . . . .	131
21.3 Der Algorithmus von <i>Cholesky</i> . . . . .	136
§ 22. Übersicht über die Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen . . . . .	138
§ 23. Ausgleichung von Höhennetzen . . . . .	141
§ 24. Reduzierte Fehlergleichungen . . . . .	144
24.1 Elimination einer Unbekannten mittels der Summengleichung . . . . .	144
24.2 Die Schreibersche Regel . . . . .	145
§ 25. Stationsausgleichungen . . . . .	148
§ 26. Trigonometrisches Einschneiden . . . . .	158
§ 27. Ausgleichung von Streckennetzen . . . . .	184
§ 28. Die Ausgleichung von Triangulierungsnetzen nach vermittelnden Beobachtungen . . . . .	189
28.1 Ausgleichen von Füllnetzen . . . . .	189
28.2 Ausgleichen von freien Flächennetzen . . . . .	190

## IV. Abschnitt

**Die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen**

§ 29. Einführung in die Methode der bedingten Beobachtungen . . . . .	193
§ 30. Das Aufstellen der Bedingungsgleichungen . . . . .	194
30.1 Aufsuchen der Bedingungen . . . . .	194
30.2 Lineare Bedingungsgleichungen . . . . .	195
30.3 Nichtlineare Bedingungsgleichungen . . . . .	197
§ 31. Korrelatengleichungen, Normalgleichungen und Proben . . . . .	197
31.1 Aufstellen und Auflösen der Korrelatengleichungen und der Normalgleichungen . . . . .	197
31.2 Die $[v]$ -Proben . . . . .	199
31.3 Summenproben und Schlußprobe . . . . .	200
§ 32. Mittlerer Fehler einer beobachteten Größe . . . . .	201
32.1 Zurückführen bedingter auf vermittelnde Beobachtungen . . . . .	201
32.2 Die Berechnung des mittleren Fehlers einer beobachteten Größe . . . . .	202
§ 33. Bedingte Beobachtungen mit ungleichen Gewichten . . . . .	203

§ 34. Die Gewichte von Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen . . . . .	204
34.1 Darstellen des Funktionsgewichtes mittels der Übertragungskoeffizienten	204
34.2 Berechnen der Funktionengewichte . . . . .	206
34.3 Die Gewichtskoeffizienten der ausgeglichenen Beobachtungen . . . . .	208
34.4 Das Gewicht einer Funktion von Funktionen der ausgeglichenen Beobachtungen . . . . .	210
§ 35. Übersicht über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen . . . . .	211
§ 36. Einfache Anwendungen der bedingten Beobachtungen . . . . .	213
§ 37. Bedingungsgleichungen in Dreiecksnetzen . . . . .	220
37.1 Bedingungen bei Winkelbeobachtungen in freien Netzen . . . . .	220
37.2 Abzählformeln bei Winkelbeobachtungen in freien Netzen . . . . .	222
37.3 Bedingungen bei Winkelbeobachtungen in angeschlossenen Netzen . . . . .	226
37.4 Behandlung von Richtungssätzen . . . . .	227
37.5 Fehlerberechnung in trigonometrischen Netzen. . . . .	228
§ 38. Iterative und gruppenweise Behandlung von Bedingungsgleichungen . . . . .	239
38.1 Ein Gaußsches Iterationsverfahren . . . . .	239
38.2 Näherungsausgleichung von Dreiecksnetzen mit Richtungsbeobachtungen	241
38.3 Reduzierte Bedingungsgleichungen . . . . .	241
38.4 Das Krügersche Zweigruppenverfahren . . . . .	243
§ 39. Entwicklungsverfahren und Substitutionsverfahren . . . . .	251
39.1 Grundgedanken des Entwicklungsverfahrens. . . . .	251
39.2 Die Entwicklung des Korrelaten nach den Widersprüchen . . . . .	252
39.3 Der Algorithmus des Entwicklungsverfahrens . . . . .	253
39.4 Grundgedanken des Substitutionsverfahrens . . . . .	256

## V. Abschnitt

### Ausgleichung von korrelierten Beobachtungen

§ 40. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen . . . . .	261
40.1 Direkte Lösung . . . . .	261
40.2 Zweistufige Ausgleichung nach <i>F. W. Bessel</i> . . . . .	262
40.3 Eine Lösung von <i>C. F. Baeschlin</i> . . . . .	264
§ 41. Bedingungsgleichungen mit Unbekannten . . . . .	270
41.1 Allgemeine Form der Ausgleichungsaufgabe . . . . .	270
41.2 Fehlergleichungen mit verschiedenartigen Beobachtungsgrößen . . . . .	272
§ 42. Ausgleichen korrelierter Beobachtungen mittels äquivalenter Fehlergleichungen	277
42.1 Äquivalente Fehlergleichungen . . . . .	277
42.2 Ausgleichen korrelierter Größen nach bedingten Beobachtungen . . . . .	278
42.3 Ausgleichen korrelierter Größen nach vermittelnden Beobachtungen . . . . .	280
§ 43. Ausgleichen korrelierter Beobachtungen mit Hilfe der Matrix der Gewichtskoeffizienten. . . . .	286
43.1 Das Ausgleichungsverfahren. . . . .	287
43.2 Ausgleichen korrelierter Größen nach bedingten Beobachtungen . . . . .	296
43.3 Ausgleichen korrelierter Größen nach vermittelnden Beobachtungen . . . . .	297

## VI. Abschnitt

**Sonderaufgaben und mathematische Statistik**

§ 44. Ausgleichung durch schrittweise Annäherung . . . . .	300
§ 45. Bestimmen der Konstanten einer linearen Transformation (Helmert-Transformation) . . . . .	311
45.1 Berechnen der Transformationskonstanten aus den auf die Schwerpunkte bezogenen Koordinaten der Paßpunkte . . . . .	311
45.2 Berechnen der Konstanten zur Transformation photogrammetrischer Modelle aus den ursprünglichen Koordinaten der Paßpunkte . . . . .	314
§ 46. Genäherte Darstellung von Funktionen . . . . .	317
46.1 Bestimmung der ausgleichenden Geraden . . . . .	318
46.2 Darstellung einer Funktion durch eine Potenzreihe . . . . .	322
46.3 Darstellung einer Funktion durch trigonometrische Reihen . . . . .	325
§ 47. Grundbegriffe der mathematischen Statistik; Normalverteilung . . . . .	335
47.1 Einführung . . . . .	335
47.2 Grundgesamtheit, Verteilungs- und Dichtefunktionen . . . . .	337
47.3 Die Parameter der Grundgesamtheit . . . . .	339
47.4 Die Gaußsche Normalverteilung . . . . .	342
47.5 Die Standardform der Normalverteilung . . . . .	342
47.6 Die $\lambda p$ %-Grenzen der Normalverteilung und die theoretischen Maximalfehler . . . . .	344
§ 48. Stichprobenverteilungen und Vertrauensgrenzen . . . . .	346
48.1 Die Parameter der Stichprobe . . . . .	346
48.2 Prüfen einer Stichprobe auf Normalverteilung; das Wahrscheinlichkeitsnetz . . . . .	347
48.3 Vertrauensbereich für den empirischen Mittelwert bei bekanntem $\sigma$ (Normalverteilung). . . . .	352
48.4 Vertrauensbereich für den empirischen Mittelwert bei unbekanntem $\sigma$ ( $t$ -Verteilung) . . . . .	354
48.5 Vertrauensbereich für $\sigma$ , wenn $s$ bekannt ist ( $\chi^2$ -Verteilung) . . . . .	358
48.6 Vertrauensgrenzen für den Quotienten zweier Standardabweichungen ( $F$ -Verteilung) . . . . .	363
§ 49. Statistische Prüfverfahren oder Signifikanzteste . . . . .	367
49.1 Allgemeines über Signifikanzteste . . . . .	367
49.2 Signifikanztest für den Mittelwert bei bekanntem $\sigma$ . . . . .	369
49.3 Signifikanztest für den Mittelwert bei unbekanntem $\sigma$ . . . . .	372
49.4 Testen des Verhältnisses von zwei empirischen Varianzen . . . . .	374
49.5 Prüfen auf Häufigkeitsverteilung ( $\chi^2$ -Anpassungstest) . . . . .	375
49.6 Die Streuungszzerlegung oder Varianzanalyse . . . . .	378
49.7 Prüfung von Abhängigkeiten (Regression und Korrelation) . . . . .	383
49.8 Zur Anwendung der statistischen Verfahren auf geodätische Beobachtungen . . . . .	386

## VII. Abschnitt

**Anwendungen der Matrizenrechnung auf die Ausgleichsrechnung**

§ 50. Grundregeln der Matrizenrechnung . . . . .	388
50.1 Definition und Bezeichnungen . . . . .	388
50.2 Rechenoperationen mit Matrizen. . . . .	390

50.3	Sonderfälle und Anwendungen der Multiplikationsregel . . . . .	392
50.4	Inversion der Matrizen . . . . .	394
50.5	Symmetrische Matrizen . . . . .	397
50.6	Differentiation von Matrizenfunktionen . . . . .	401
§ 51.	Ausgleichen vermittelnder Beobachtungen . . . . .	402
51.1	Die Fehlergleichungen . . . . .	402
51.2	Die Normalgleichungen . . . . .	403
51.3	Berechnung der Unbekannten . . . . .	403
51.4	Einflußzahlen und Gewichtskoeffizienten (Kofaktoren) . . . . .	404
51.5	Gewicht einer Funktion der Unbekannten . . . . .	405
51.6	Gewicht einer Funktion von Funktionen . . . . .	405
51.7	Verprobung durch die Fehlerquadratsumme . . . . .	406
51.8	Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit . . . . .	406
§ 52.	Ausgleichen bedingter Beobachtungen . . . . .	406
52.1	Die Bedingungsgleichungen . . . . .	406
52.2	Die Normalgleichungen . . . . .	407
52.3	Die gewogene Fehlerquadratsumme . . . . .	407
52.4	Gewichte der ausgeglichenen Beobachtungen und ihrer Funktionen . . . . .	408
§ 53.	Einige Sonderaufgaben . . . . .	408
53.1	Das Boltzsche Entwicklungsverfahren . . . . .	408
53.2	Das Boltzsche Substitutionsverfahren . . . . .	410
53.3	Ausgleichen korrelierter Beobachtungen . . . . .	412
<b>Schrifttum</b>	(Auswahl) . . . . .	415
<b>Namen- und Sachverzeichnis</b>	. . . . .	417