INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

1. Darstellung von Zahlen und Fehleranalyse 1
   1.1 Definition von Fehlergrößen 1
   1.2 Dezimaldarstellung von Zahlen 2
   1.3 Rundungsvorschriften für Dezimalzahlen 3
   1.4 Schreibweise für Näherungszahlen und Regeln zur Bestimmung der Anzahl sicherer Stellen 4
   1.5 Fehlerquellen 6
      1.5.1 Der Verfahrensfehler 6
      1.5.2 Der Eingangsfehler 6
      1.5.3 Der Rechnungsfehler 9

2. Numerische Verfahren zur Lösung algebraischer und transzendenter Gleichungen 10
   2.1 Iterationsverfahren 10
      2.1.1 Konstruktionsmethode und Definition 10
      2.1.2 Existenz von Lösungen und Eindeutigkeit der Lösungen 12
      2.1.3 Konvergenz eines Iterationsverfahrens. Fehlerabschätzungen. Rechnungsfehler 13
      2.1.4 Praktische Durchführung 15
         2.1.4.1 Algorithmus 15
         2.1.4.2 Bestimmung des Startwertes 16
         2.1.4.3 Konvergenzuntersuchung 17
      2.1.5 Konvergenzordnung eines Iterationsverfahrens 17
      2.1.6 Spezielle Iterationsverfahren 19
         2.1.6.1 Das Newtonsche Verfahren für einfache Nullstellen 19
         2.1.6.2 Das Newtonsche Verfahren für mehrfache Nullstellen 21
         2.1.6.3 Regula falsi für einfache und mehrfache Nullstellen 22
         2.1.6.4 Das Verfahren von Steffensen für einfache und mehrfache Nullstellen 24
         2.1.6.5 Das Pegasus-Verfahren 25
         2.1.6.6 Bisektion 26
         2.1.6.7 Entscheidungshilfen 27
   2.2 Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen 28
      2.2.1 Das Horner-Schema für algebraische Polynome 29
         2.2.1.1 Das einfache Horner-Schema für reelle Argumentwerte 29
         2.2.1.2 Das einfache Horner-Schema für komplexe Argumentwerte 30

Seite

2.2.1.3 Das vollständige Horner-Schema für reelle Argumentwerte 32

2.2.1.4 Anwendungen 34

2.2.2 Methoden zur Bestimmung sämtlicher Lösungen algebraischer Gleichungen 35

2.2.2.1 Vorbemerkungen und Überblick 35

2.2.2.2 Das Verfahren von Muller 36

2.2.2.3 Das Verfahren von Bauhuber 40

2.2.2.4 Das Verfahren von Jenkins und Traub 41

3. Verfahren zur numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme 42

3.1 Aufgabenstellung und Lösbarkeitsbedingungen. Prinzip der direkten Methoden 42

3.2 Der Gauß-Algorithmus 45

3.3 Matrizeninversion mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus 51

3.4 Das Verfahren von Cholesky 51

3.5 Das Gauß-Jordan-Verfahren 52

3.6 Bestimmung der zu einer Matrix inversen Matrix mit dem Austauschverfahren (Pivotisieren) 53

3.7 Gleichungssysteme mit tridiagonalen Matrizen 55

3.8 Gleichungssysteme mit zyklisch tridiagonalen Matrizen 57

3.9 Gleichungssysteme mit fünfdiagonalen Matrizen und allgemeinen Bandmatrizen 58

3.9.1 Systeme mit fünfdiagonalen Matrizen 58

3.9.2 Gleichungssysteme mit Bandmatrizen 60

3.10 Fehler, Kondition und Nachiteration 61

3.10.1 Fehler und Kondition 61

3.10.2 Nachiteration 64

3.11 Iterationsverfahren 65

3.11.1 Vorbemerkungen 65

3.11.2 Das Iterationsverfahren in Gesamtschritten 65

3.11.3 Das Iterationsverfahren in Einzelschritten oder das Gauß-Seidelsche Iterationsverfahren 71

3.11.4 Relaxation beim Gesamtschrittverfahren 72

3.11.5 Relaxation beim Einzelschrittverfahren 73

3.12 Entscheidungshilfen für die Auswahl des Verfahrens 74

3.13 Gleichungssysteme mit Blockmatrizen 76

4. Systeme nichtlinearer Gleichungen 81

4.1 Allgemeines Iterationsverfahren 81

Seite

4.2 Spezielle Iterationsverfahren 84

4.2.1 Newtonsche Verfahren 84

4.2.1.1 Das quadratisch konvergente Newton-Verfahren 84

4.2.1.2 Das gedämpfte Newton-Verfahren 86

4.2.2 Regula falsi 87

4.2.3 Das Verfahren des stärksten Abstiegs (Gradientenverfahren) 88

4.2.4 Das Verfahren von Brown 90

5. Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen 91

5.1 Definitionen und Aufgabenstellungen 91

5.2 Diagonalähnliche Matrizen 92

5.3 Das Iterationsverfahren nach v. Mises 94

5.3.1 Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes und des zugehörigen Eigenvektors 94

5.3.2 Bestimmung des betragskleinsten Eigenwertes 98

5.3.3 Bestimmung weiterer Eigenwerte und Eigenvektoren 99

5.4 Konvergenzverbesserung mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten im Falle hermitescher Matrizen 100

5.5 Direkte Methoden 101

5.5.1 Das Verfahren von Krylov 101

5.5.1.1 Bestimmung der Eigenwerte 101

5.5.1.2 Bestimmung der Eigenvektoren 103

5.5.2 Bestimmung der Eigenwerte positiv definiter symmetrischer tridiagonaler Matrizen mit Hilfe des QD-Algorithmus 103

5.5.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix nach den Verfahren von Martin, Parlett, Peters, Reinsch, Wilkinson 105

6. Approximation stetiger Funktionen 107

6.1 Approximationsaufgabe und beste Approximation 107

6.2 Approximation im quadratischen Mittel 110

6.2.1 Kontinuierliche Fehlerquadratmethode von Gauß 110

6.2.2 Diskrete Fehlerquadratmethode von Gauß 113

6.3 Approximation von Polynomen durch Tschebyscheff-Polynome 117

6.3.1 Beste gleichmäßige Approximation. Definition 118

6.3.2 Approximation durch Tschebyscheff-Polynome 119

6.3.2.1 Einführung der Tschebyscheff-Polynome 119

6.3.2.2 Darstellung von Polynomen als Linearkombination von Tschebyscheff-Polynomen 120

Seite

6.3.2.3 Beste gleichmäßige Approximation 122

6.3.2.4 Gleichmäßige Approximation 122

6.4 Approximation periodischer Funktionen 125

6.4.1 Approximation im quadratischen Mittel 125

6.4.2 Trigonometrische Interpolation 126

6.4.3 Komplexe diskrete Fourier-Transformation 128

7. Interpolation und Splines 130

7.1 Aufgabenstellung zur Interpolation durch algebraische Polynome 130

7.2 Interpolationsformeln von Lagrange 131

7.2.1 Formel für beliebige Stützstellen 131

7.2.2 Formel für äquidistante Stützstellen 132

7.3 Das Interpolationsschema von Aitken für beliebige Stützstellen 132

7.4 Inverse Interpolation nach Aitken 135

7.5 Interpolationsformeln von Newton 135

7.5.1 Formel für beliebige Stützstellen 135

7.5.2 Formel für äquidistante Stützstellen 137

7.6 Interpolationsformeln für äquidistante Stützstellen mit Hilfe des Frazerdiagramms 138

7.7 Restglied der Interpolation und Aussagen zur Abschätzung des Interpolationsfehlers 143

7.8 Interpolierende Polynom-Splines dritten Grades 145

7.8.1 Problemstellung 145

7.8.2 Definition der Splinefunktionen 146

7.8.3 Berechnung der kubischen Splinefunktionen 148

7.9 Hermite Splines fünften Grades 154

7.10 Polynomiale Ausgleichssplines dritten Grades 162

7.11 Interpolation bei Funktionen mehrerer Veränderlichen 164

7.11.1 Interpolationsformel von Lagrange 164

7.11.2 Zweidimensionale Polynom-Splines dritten Grades 166

7.12 Bezier-Splines 176

7.13 Rationale Interpolation 176

7.14 Entscheidungshilfen bei der Auswahl des zweckmäßigsten Verfahrens zur angenäherten Darstellung einer stetigen Funktion 177

8. Numerische Differentiation 180

8.1 Differentiation mit Hilfe eines Interpolationspolynoms 180

Seite

8.1.1 Berechnung der ersten Ableitung an einer beliebigen Stelle 180

8.1.2 Tabelle zur Berechnung der ersten und zweiten Ableitungen an Stützstellen 181

8.2 Differentiation mit Hilfe interpolierender kubischer Polynom-Splines 183

8.3 Differentiation nach dem Romberg-Verfahren 184

9. Numerische Quadratur 186

9.1 Vorbemerkungen und Motivation 186

9.2 Interpolationsquadraturformeln 186

9.2.1 Konstruktionsmethoden 186

9.2.2 Newton-Cotes-Formeln 188

9.2.2.1 Die Sehnentrapezformel 189

9.2.2.2 Die Simpsonsche Formel 190

9.2.2.3 Die 3/8-Formel 191

9.2.2.4 Weitere Newton-Cotes-Formeln 192

9.2.3 Quadraturformeln von Maclaurin 194

9.2.3.1 Die Tangententrapezformel 194

9.2.3.2 Weitere Maclaurin-Formeln 195

9.2.4 Die Euler-Maclaurin-Formeln 197

9.2.5 Fehlerschätzungsformeln und Rechnungsfehler 198

9.3 Tschebyscheffsche Quadraturformeln 200

9.4 Quadraturformeln von Gauß 202

9.5 Das Verfahren von Romberg 205

9.6 Adaptive Quadraturverfahren 207

9.7 Konvergenz der Quadraturformeln 207

10. Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung 208

10.1 Prinzip und Einteilung der numerischen Verfahren 208

10.2 Einschrittverfahren 209

10.2.1 Das Polygonzugverfahren von Euler-Cauchy 209

10.2.2 Das Verfahren von Heun (Praediktor-Korrektor-Verfahren) 210

10.2.3 Runge-Kutta-Verfahren 212

10.2.3.1 Allgemeiner Ansatz 212

10.2.3.2 Das klassische Runge-Kutta-Verfahren 213

10.2.3.3 Zusammenstellung expliziter Runge-Kutta-Verfahren 215

Seite

10.2.4 Anfangswertproblemlöser 218

10.2.5 Implizite Runge-Kutta-Verfahren 218

10.3 Mehrschrittverfahren 220

10.3.1 Prinzip der Mehrschrittverfahren 220

10.3.2 Das explizite Verfahren von Adams-Bashforth 222

10.3.3 Das Praediktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Moulton 224

10.3.4 Weitere Praediktor-Korrektor-Formeln 227

10.3.5 Das Mehrschrittverfahren von Gear 228

10.4 Fehlerschätzungsformeln und Rechnungsfehler 230

10.4.1 Fehlerschätzungsformeln 230

10.4.2 Rechnungsfehler 232

10.5 Extrapolationsverfahren 233

10.6 Entscheidungshilfen bei der Wahl des Verfahrens 235

11. Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und bei Differentialgleichungen höherer Ordnung 236

11.1 Runge-Kutta-Verfahren 237

11.1.1 Allgemeiner Ansatz 237

11.1.2 Das klassische Runge-Kutta-Verfahren 237

11.1.3 Runge-Kutta-Verfahren für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung 241

11.1.4 Schrittweitensteuerung 242

11.1.5 Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren 243

11.1.5.1 Beschreibung des Verfahrens 243

11.1.5.2 Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung 245

11.2 Mehrschrittverfahren 248

11.3 Ein Mehrschrittverfahren für steife Systeme 251

12. Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 253

12.1 Zurückführung des Randwertproblems auf ein Anfangswertproblem 253

12.1.1 Randwertprobleme für nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung 253

12.1.2 Randwertprobleme für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung 255

12.1.3 Mehrzielverfahren 257

Seite

12.2 Differenzenverfahren 260

12.2.1 Das gewöhnliche Differenzenverfahren 260

12.2.2 Differenzenverfahren höherer Näherung 266

12.2.3 Iterative Auflösung der linearen Gleichungssysteme zu speziellen Randwertproblemen 268

12.2.4 Lineare Eigenwertprobleme 269

Anhang: PASCAL-Programme 271

Verzeichnis der Programme 272

L Literaturverzeichnis 491

L.1 Lehrbücher und Monographien 491

L.2 Originalarbeiten 493

L.3 Aufgaben- und Formelsammlungen, Tabellenwerke, Programmbibliotheken 494

L.4 Ergänzungen zu L.1 495

L.5 Ergänzungen zu L.2 496

Sachregister 499