Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Rechnen

§1. Zahlen und ihre Darstellung 1
1.1 Zahldarstellung zu beliebiger Basis 2 * 1.2 Realisierung von Zahldarstellungen auf Rechenhilfsmitteln 6 * 1.3 Rechnen im Dualsystem 8 * 1.4 Festkomma-Arithmetik 11 * 1.5 Gleitkomma-Arithmetik 11 * 1.6 Aufgaben 12

§2. Operationen mit Gleitkommazahlen 13
2.1 Die Rundungsvorschrift 14 * 2.2 Verknüpfung von Gleitkommazahlen 16 * 2.3 Numerisch stabile bzw. instabile Auswertung von Formeln 18 * 2.4 Aufgaben 20

§3. Fehleranalysen 20
3.1 Die Kondition eines Problems 21 * 3.2 Abschätzung der Rundungsfehler durch Vorwärtsanalyse 24 * 3.3 Die Rückwärtsanalyse des Rundungsfehlers 28 * 3.4 Intervallarithmetik 29 * 3.5 Aufgaben 30

§4. Algorithmen 32
4.1 Der euklidische Algorithmus 32 * 4.2 Bewertung von Algorithmen 36 * 4.3 Komplexität von Algorithmen 39 * 4.4 Berechnung der Komplexität einiger Algorithmen 43 * 4.5 Ein Konzept zur Verbesserung der Komplexitätsordnung 45 * 4.6 Schnelle Matrixmultiplikation 48 * 4.7 Aufgaben 49

Kapitel 2. Lineare Gleichungssysteme

§1. Das Eliminationsverfahren nach Gauß 51
1.1 Notation und Aufgabenstellung 52 * 1.2 Der Rechenprozeß 52 * 1.3 Das Gaußsche Verfahren als Dreieckszerlegung 54 * 1.4 Einige spezielle Matrizen 60 * 1.5 Bemerkungen zur Pivotsuche 62 * 1.6 Komplexität des Gaußschen Algorithmus 63 * 1.7 Aufgaben 65

§2. Die Cholesky-Zerlegung 66
2.1 Erinnerung an Bekanntes über positiv definite $(n \times n)$-Matrizen 66 * 2.2 Der Satz von der Cholesky-Zerlegung 66 * 2.3 Komplexität der Cholesky-Zerlegung 68 * 2.4 Aufgaben 68

§3. Die QR-Zerlegung nach Householder 69
3.1 Householder-Matrizen 69 * 3.2 Die Grundaufgabe 70 * 3.3 Der Algorithmus nach Householder 71 * 3.4 Komplexität der QR-Zerlegung 72 * 3.5 Aufgaben 72

§4. Vektornormen und Normen von Matrizen 73
4.1 Normen auf Vektorräumen 73 * 4.2 Die natürliche Norm einer Matrix 74 * 4.3 Spezielle Normen von Matrizen 75 * 4.4 Aufgaben 78

§5. Fehlerabschätzungen 78
5.1 Kondition einer Matrix 78 * 5.2 Eine Fehlerabschätzung bei gestörter Matrix 80 * 5.3 Brauchbare Lösungen 81 * 5.4 Aufgaben 83

§6. Schlechtkonditionierte Probleme 84
6.1 Die Singulärwertzerlegung einer Matrix 85 * 6.2 Pseudonormallösungen linearer Gleichungssysteme 88 * 6.3 Die Pseudoinverse einer Matrix 90 * 6.4 Zurück zu linearen Gleichungssystemen 93 * 6.5 Verbesserung der Kondition und Regularisierung eines linearen Gleichungssystems 94 * 6.6 Aufgaben 97

Kapitel 3. Eigenwerte

§1. Reduktion auf Tridiagonal- bzw. Hessenberg-Gestalt 99
1.1 Das Householder-Verfahren 100 * 1.2 Berechnung der Eigenwerte von Tridiagonalmatrizen 102 * 1.3 Berechnung der Eigenwerte von Hessenberg-Matrizen 104 * 1.4 Aufgaben 106

§2. Die Jacobi-Rotation; Eigenwertabschätzungen 106
2.1 Das Jacobi-Verfahren 106 * 2.2 Abschätzungen der Eigenwerte 110 * 2.3 Aufgaben 113

§3. Die Potenzmethode 113
3.1 Ein iterativer Ansatz 114 * 3.2 Berechnung der Eigenvektoren und weiterer Eigenwerte 116 * 3.3 Der Rayleigh-Quotient 116 * 3.4 Aufgaben 117

§4. Der QR-Algorithmus 118
4.1 Konvergenz des QR-Algorithmus 119 * 4.2 Bemerkungen zum LR-Algorithmus 122 * 4.3 Aufgaben 125

Kapitel 4. Approximation

§1. Vorbereitungen 126
1.1 Normierte Vektorräume 126 * 1.2 Banachräume 127 * 1.3 Hilberträume und Prae-Hilberträume 128 * 1.4 Die Räume $L^p[a, b]$ 130 * 1.5 Lineare Operatoren 131 * 1.6 Aufgaben 133

§2. Die Approximationssätze von Weierstraß 134
2.1 Approximation durch Polynome 134 * 2.2 Der Approximationssatz für stetige Funktionen 135 * 2.3 Der Gedankenkreis von Korovkin 137 * 2.4 Anwendungen des Satzes 2.3. 140 * 2.5 Approximationsgüte 142 * 2.6 Aufgaben 144

§3. Das allgemeine Approximationsproblem 145
3.1 Beste Näherungen 145 * 3.2 Existenz eines Proximums 146 * 3.3 Eindeutigkeit des Proximums 147 * 3.4 Lineare Approximation 148 * 3.5 Eindeutigkeit in endlichdimensionalen linearen Unterräumen 149 * 3.6 Aufgaben 153

§4. Gleichmäßige Approximation 153
4.1 Approximation durch Polynome 154 * 4.2 Haarsche Räume 155 * 4.3 Der Alternantensatz 156 * 4.4 Eindeutigkeit 158 * 4.5 Eine Abschätzung 158 * 4.6 Berechnung des Proximums 159 * 4.7 Tschebyschev-Polynome 1. Art 163 * 4.8 Entwicklung nach Tschebyschev-Polynomen 164 * 4.9 Konvergenz der Proxima 167 * 4.10 Zur nichtlinearen Approximation 167 * 4.11 Bemerkungen zur Approximationsaufgabe in $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ 168 * 4.12 Aufgaben 169

§5. Approximation in Prae-Hilberträumen 170
5.1 Charakterisierung des Proximums 171 * 5.2 Die Normalgleichungen 171 * 5.3 Orthonormalsysteme 172 * 5.4 Die Legendreschen Polynome 174 * 5.5 Eigenschaften orthonormierter Polynome 176 * 5.6 Konvergenz in $C[a,b]$ 177 * 5.7 Approximation stückweise stetiger Funktionen 178 * 5.8 Trigonometrische Approximation 179 * 5.9 Aufgaben 182

§6. Die Methode der kleinsten Quadrate 183
6.1 Diskrete Approximation 184 * 6.2 Die Lösung der Normalgleichungen 185 * 6.3 Ausgleichung durch Polynome 186 * 6.4 Zusammenfallende Stützstellen 188 * 6.5 Diskrete Approximation durch trigonometrische Funktionen 190 * 6.6 Aufgaben 193

Kapitel 5. Interpolation

§1. Das Interpolationsproblem 194
1.1 Interpolation in Haarschen Räumen 194 * 1.2 Interpolation durch Polynome 195 * 1.3 Das Restglied 196 * 1.4 Abschätzungen 197 * 1.5 Aufgaben 199

§2. Interpolationsmethoden und Restglied 200
2.1 Ansatz von Lagrange 200 * 2.2 Ansatz von Newton 201 * 2.3 Steigungen 201 * 2.4 Die allgemeine Peanosche Restglieddarstellung 204 * 2.5 Eine ableitungsfreie Fehlerabschätzung 210 * 2.6 Verbindung zur Analysis 210 * 2.7 Aufgaben 212

§3. Gleichabständige Stützstellen 213
3.1 Das Differenzenschema 214 * 3.2 Darstellungen des Interpolationspolynoms 214 * 3.3 Numerische Differentiation 216 * 3.4 Aufgaben 220

§4. Konvergenz von Interpolationspolynomen 221
4.1 Beste Interpolation 221 * 4.2 Konvergenzprobleme 222 * 4.3 Konvergenzaussagen 223 * 4.4 Aufgaben 226

§5. Spezielle Interpolationen 227
5.1 Das Hornerschema 227 * 5.2 Der Algorithmus von Aitken-Neville 228 * 5.3 Hermite-Interpolation 230 * 5.4 Trigonometrische Interpolation 232 * 5.5 Interpolation im Komplexen 233 * 5.6 Aufgaben 234

§6. Mehrdimensionale Interpolation 235
6.1 Verschiedene Interpolationsaufgaben 235 * 6.2 Interpolation auf Rechtecken 237 * 6.3 Abschätzung des Interpolationsfehlers 238 * 6.4 Aufgaben 240

Kapitel 6. Splines

§1. Polynom-Splines 242
1.1 Splineräume 243 * 1.2 Basis eines Splineraums 244 * 1.3 Proxima in Splineräumen 244 * 1.4 Aufgaben 246

§2. Interpolierende Splines 247
2.1 Splines ungeraden Grades 247 * 2.2 Eine Extremaleigenschaft der Splines 250 * 2.3 Quadratische Splines 252 * 2.4 Konvergenzverhalten 254 * 2.5 Aufgaben 255

§3. B-Splines 256
3.1 Existenz von B-Splines 256 * 3.2 Lokale Basen 257 * 3.3 Weitere Eigenschaften von B-Splines 259 * 3.4 Lineare B-Splines 261 * 3.5 Quadratische B-Splines 262 * 3.6 Kubische B-Splines 263 * 3.7 Aufgaben 263

§4. Berechnung interpolierender Splines 264
4.1 Kubische Splines 264 * 4.2 Quadratische Splines 267 * 4.3 Ein allgemeines Interpolationsproblem 268 * 4.4 Aufgaben 270

§5. Abschätzungen und Approximation durch Splines 271
5.1 Fehlerabschätzungen für lineare Splines 271 * 5.2 Zur gleichmäßigen Approximation durch lineare Splines 273 * 5.3 Ausgleichen durch lineare Splines 273 * 5.4 Fehlerabschätzungen für Splines höheren Grades 275 * 5.5 Ausgleichssplines höheren Grades 278 * 5.6 Aufgaben 279

§6. Mehrdimensionale Splines 281
6.1 Bilineare Splines 281 * 6.2 Bikubische Splines 282 * 6.3 Blende-Splines 283 * 6.4 Aufgaben 286

Kapitel 7. Integration

§1. Interpolationsquadratur 289
1.1 Rechteckregeln 289 * 1.2 Die Sehnentrapezregel 292 * 1.3 Die Euler-MacLaurinsche Entwicklung 295 * 1.4 Die Simpsonsche Regel 298 * 1.5 Newton-Cotes-Formeln 302 * 1.6 Unsymmetrische Quadraturformeln 303 * 1.7 Aufgaben 304

§2. Schrittweitenextrapolation 304
2.1 Das Halbierungsverfahren 305 * 2.2 Fehlerbetrachtung 307 * 2.3 Extrapolation 308 * 2.4 Konvergenz 310 * 2.5 Aufgaben 313

§3. Numerische Integration nach Gauß 313
3.1 Ansatz von Gauß 314 * 3.2 Gauß-Quadratur als Interpolationsquadratur 316 * 3.3 Fehlerdarstellung 317 * 3.4 Modifikationen 319 * 3.5 Uneigentliche Integrale 320 * 3.6 Stützstellen und Gewichte Gaußscher Quadraturformeln 322 * 3.7 Aufgaben 323

§4. Spezielle Quadraturen 324
4.1 Integration über ein unendliches Intervall 324 * 4.2 Singulärer Integrand 326 * 4.3 Periodische Funktionen 328 * 4.4 Aufgaben 329

§5. Optimalität und Konvergenz 329
5.1 Normminimierung 330 * 5.2 Minimaler Einfluß zufälliger Fehler 331 * 5.3 Optimale Quadraturformeln 332 * 5.4 Konvergenz von Quadraturformeln 335 * 5.5 Quadraturoperatoren 338 * 5.6 Aufgaben 339

§6. Mehrdimensionale Integration 340
6.1 Kartesische Produkte 340 * 6.2 Integration über Standardgebiete 343 * 6.3 Die Monte-Carlo-Methode 345 * 6.4 Aufgaben 347

Kapitel 8. Iteration

§1. Das allgemeine Iterationsverfahren 350
1.1 Anschauliche Deutung des Iterationsverfahrens 350 * 1.2 Konvergenz des Iterationsverfahrens 351 * 1.3 Lipschitzkonstanten 353 * 1.4 Fehlerabschätzung 354 * 1.5 Konvergenzverhalten und Konvergenzgüte 355 * 1.6 Aufgaben 356

§2. Das Newton-Verfahren 357
2.1 Konvergenzbeschleunigung des Iterationsverfahrens 358 * 2.2 Geometrische Deutung 359 * 2.3 Mehrfache Nullstellen 360 * 2.4 Das Sekantenverfahren 361 * 2.5 Das Newton-Verfahren für $m > 1$ 363 * 2.6 Wurzeln algebraischer Gleichungen 364 * 2.7 Aufgaben 365

§3. Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme 367
3.1 Folgen von Iterationsmatrizen 367 * 3.2 Das Gesamtschrittverfahren 369 * 3.3 Das Einzelschrittverfahren 373 * 3.4 Der Satz von Stein und Rosenberg 376 * 3.5 Aufgaben 380

§4. Weitere Konvergenzuntersuchungen 381
4.1 Relaxation beim Gesamtschrittverfahren 381 * 4.2 Relaxation beim Einzelschrittverfahren 383 * 4.3 Optimale Relaxationsparameter 386 * 4.4 Aufgaben 391

Kapitel 9. Lineare Optimierung

§1. Einführende Beispiele, allgemeine Problemstellung 393
1.1 Eine optimale Produktionsplanung 393 * 1.2 Ein semiinfinites Optimierungsproblem 395 * 1.3 Ein lineares Steuerungsproblem 396 * 1.4 Die allgemeine Problemstellung 397 * 1.5 Aufgaben 398

§2. Polyeder 399
2.1 Charakterisierung von Ecken 399 * 2.2 Existenz von Ecken 401 * 2.3 Das Hauptergebnis 402 * 2.4 Eine weitere Charakterisierung von Ecken 403 * 2.5 Aufgaben 404

§3. Das Simplexverfahren 405
3.1 Vorbereitungen 405 * 3.2 Der Eckenaustausch ohne Entartung 407 * 3.3 Startecken 412 * 3.4 Bemerkungen zu entarteten Ecken 413 * 3.5 Die Zweiphasenmethode 414 * 3.6 Das revidierte Simplexverfahren 415 * 3.7 Aufgaben 417

§4. Betrachtungen zur Komplexität 418
4.1 Die Beispiele von Klee und Minty 418 * 4.2 Zum Durchschnittsverhalten von Algorithmen 419 * 4.3 Laufzeitverhalten von Algorithmen 420 * 4.4 Polynomiale Algorithmen 422 * 4.5 Aufgaben 427

Literatur 428

Bezeichnungen 436

Namen- und Sachverzeichnis 438