

## INHALTSVERZEICHNIS.

	Seite
1. Darstellung von Zahlen und Fehleranalyse	1
1.1 Definition von Fehlergrößen	1
1.2 Dezimaldarstellung von Zahlen	2
1.3 Rundungsvorschriften für Dezimalzahlen	3
1.4 Schreibweise für Näherungszahlen und Regeln zur Bestimmung der Anzahl sicherer Stellen	4
1.5 Fehlerquellen	6
1.5.1 Der Verfahrensfehler	6
1.5.2 Der Eingangsfehler	6
1.5.3 Der Rechenfehler	9
2. Numerische Verfahren zur Lösung algebraischer und transzendenten Gleichungen	10
2.1 Iterationsverfahren	10
2.1.1 Konstruktionsmethode und Definition	10
2.1.2 Existenz von Lösungen und Eindeutigkeit der Lösungen	12
2.1.3 Konvergenz eines Iterationsverfahrens. Fehlerabschätzungen. Rechenfehler	13
2.1.4 Praktische Durchführung	15
2.1.4.1 Algorithmus	15
2.1.4.2 Bestimmung des Startwertes	16
2.1.4.3 Konvergenzuntersuchung	17
2.1.5 Konvergenzordnung eines Iterationsverfahrens	17
2.1.6 Spezielle Iterationsverfahren	19
2.1.6.1 Das Newtonsche Verfahren für einfache Nullstellen	19
2.1.6.2 Das Newtonsche Verfahren für mehrfache Nullstellen	21
2.1.6.3 Regula falsi für einfache und mehrfache Nullstellen	22
2.1.6.4 Das Verfahren von Steffensen für einfache und mehrfache Nullstellen	24
2.1.6.5 Das Pegasus-Verfahren	25
2.1.6.6 Bisektion	26
2.1.6.7 Entscheidungshilfen	27
2.2 Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen	28
2.2.1 Das Horner-Schema für algebraische Polynome	29
2.2.1.1 Das einfache Horner-Schema für reelle Argumentwerte	29
2.2.1.2 Das einfache Horner-Schema für komplexe Argumentwerte	30

	Seite
2.2.1.3 Das vollständige Horner-Schema für reelle Argumentwerte	32
2.2.1.4 Anwendungen	34
2.2.2 Methoden zur Bestimmung sämtlicher Lösungen algebraischer Gleichungen	35
2.2.2.1 Vorbemerkungen und Überblick	35
2.2.2.2 Das Verfahren von Muller	36
2.2.2.3 Das Verfahren von Bauhuber	40
2.2.2.4 Das Verfahren von Jenkins und Traub	41
3. Verfahren zur numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme	42
3.1 Aufgabenstellung und Lösbarkeitsbedingungen. Prinzip der direkten Methoden	42
3.2 Der Gauß-Algorithmus	45
3.3 Matrizeninversion mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus	51
3.4 Das Verfahren von Cholesky	51
3.5 Das Gauß-Jordan-Verfahren	52
3.6 Bestimmung der zu einer Matrix inversen Matrix mit dem Austauschverfahren (Pivotisieren)	53
3.7 Gleichungssysteme mit tridiagonalen Matrizen	55
3.8 Gleichungssysteme mit zyklisch tridiagonalen Matrizen	57
3.9 Gleichungssysteme mit fünfdiagonalen Matrizen und allgemeinen Bandmatrizen	58
3.9.1 Systeme mit fünfdiagonalen Matrizen	58
3.9.2 Gleichungssysteme mit Bandmatrizen	60
3.10 Fehler, Kondition und Nachiteration	61
3.10.1 Fehler und Kondition	61
3.10.2 Nachiteration	64
3.11 Iterationsverfahren	65
3.11.1 Vorbemerkungen	65
3.11.2 Das Iterationsverfahren in Gesamtschritten	65
3.11.3 Das Iterationsverfahren in Einzelschritten oder das Gauß-Seidelsche Iterationsverfahren	71
3.11.4 Relaxation beim Gesamtschrittverfahren	72
3.11.5 Relaxation beim Einzelschrittverfahren	73
3.12 Entscheidungshilfen für die Auswahl des Verfahrens	74
3.13 Gleichungssysteme mit Blockmatrizen	76
4. Systeme nichtlinearer Gleichungen	81
4.1 Allgemeines Iterationsverfahren	81

	Seite
4.2 Spezielle Iterationsverfahren	84
4.2.1 Newtonsche Verfahren	84
4.2.1.1 Das quadratisch konvergente Newton-Verfahren	84
4.2.1.2 Das gedämpfte Newton-Verfahren	86
4.2.2 Regula falsi	87
4.2.3 Das Verfahren des stärksten Abstiegs (Gradientenverfahren)	88
4.2.4 Das Verfahren von Brown	90
5. Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	91
5.1 Definitionen und Aufgabenstellungen	91
5.2 Diagonalähnliche Matrizen	92
5.3 Das Iterationsverfahren nach v. Mises	94
5.3.1 Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes und des zugehörigen Eigenvektors	94
5.3.2 Bestimmung des betragskleinsten Eigenwertes	98
5.3.3 Bestimmung weiterer Eigenwerte und Eigenvektoren	99
5.4 Konvergenzverbesserung mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten im Falle hermitescher Matrizen	100
5.5 Direkte Methoden	101
5.5.1 Das Verfahren von Krylov	101
5.5.1.1 Bestimmung der Eigenwerte	101
5.5.1.2 Bestimmung der Eigenvektoren	103
5.5.2 Bestimmung der Eigenwerte positiv definiter symmetrischer tridiagonaler Matrizen mit Hilfe des QD-Algorithmus	103
5.5.3 Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix nach den Verfahren von Martin, Parlett, Peters, Reinsch, Wilkinson	105
6. Approximation stetiger Funktionen	107
6.1 Approximationsaufgabe und beste Approximation	107
6.2 Approximation im quadratischen Mittel	110
6.2.1 Kontinuierliche Fehlerquadratmethode von Gauß	110
6.2.2 Diskrete Fehlerquadratmethode von Gauß	113
6.3 Approximation von Polynomen durch Tschebyscheff-Polynome	117
6.3.1 Beste gleichmäßige Approximation. Definition	118
6.3.2 Approximation durch Tschebyscheff-Polynome	119
6.3.2.1 Einführung der Tschebyscheff-Polynome	119
6.3.2.2 Darstellung von Polynomen als Linearkombination von Tschebyscheff-Polynomen	120

	Seite
6.3.2.3 Beste gleichmäßige Approximation	122
6.3.2.4 Gleichmäßige Approximation	122
6.4 Approximation periodischer Funktionen	125
6.4.1 Approximation im quadratischen Mittel	125
6.4.2 Trigonometrische Interpolation	126
6.4.3 Komplexe diskrete Fourier-Transformation	128
7. Interpolation und Splines	130
7.1 Aufgabenstellung zur Interpolation durch algebraische Polynome	130
7.2 Interpolationsformeln von Lagrange	131
7.2.1 Formel für beliebige Stützstellen	131
7.2.2 Formel für äquidistante Stützstellen	132
7.3 Das Interpolationsschema von Aitken für beliebige Stützstellen	132
7.4 Inverse Interpolation nach Aitken	135
7.5 Interpolationsformeln von Newton	135
7.5.1 Formel für beliebige Stützstellen	135
7.5.2 Formel für äquidistante Stützstellen	137
7.6 Interpolationsformeln für äquidistante Stützstellen mit Hilfe des Frazerdiagramms	138
7.7 Restglied der Interpolation und Aussagen zur Abschätzung des Interpolationsfehlers	143
7.8 Interpolierende Polynom-Splines dritten Grades	145
7.8.1 Problemstellung	145
7.8.2 Definition der Splinefunktionen	146
7.8.3 Berechnung der kubischen Splinefunktionen	148
7.9 Hermite Splines fünften Grades	154
7.10 Polynomiale Ausgleichssplines dritten Grades	162
7.11 Interpolation bei Funktionen mehrerer Veränderlichen	164
7.11.1 Interpolationsformel von Lagrange	164
7.11.2 Zweidimensionale Polynom-Splines dritten Grades	166
7.12 Bezier-Splines	176
7.13 Rationale Interpolation	176
7.14 Entscheidungshilfen bei der Auswahl des zweckmäßigsten Verfahrens zur angenäherten Darstellung einer stetigen Funktion	177
8. Numerische Differentiation	180
8.1 Differentiation mit Hilfe eines Interpolationspolynoms	180

	Seite
8.1.1 Berechnung der ersten Ableitung an einer beliebigen Stelle	180
8.1.2 Tabelle zur Berechnung der ersten und zweiten Ableitungen an Stützstellen	181
8.2 Differentiation mit Hilfe interpolierender kubischer Polynom-Splines	183
8.3 Differentiation nach dem Romberg-Verfahren	184
9. Numerische Quadratur	186
9.1 Vorbemerkungen und Motivation	186
9.2 Interpolationsquadraturformeln	186
9.2.1 Konstruktionsmethoden	186
9.2.2 Newton-Cotes-Formeln	188
9.2.2.1 Die Sehnentrapezformel	189
9.2.2.2 Die Simpsonsche Formel	190
9.2.2.3 Die 3/8-Formel	191
9.2.2.4 Weitere Newton-Cotes-Formeln	192
9.2.3 Quadraturformeln von Maclaurin	194
9.2.3.1 Die Tangententrapezformel	194
9.2.3.2 Weitere Maclaurin-Formeln	195
9.2.4 Die Euler-Maclaurin-Formeln	197
9.2.5 Fehlerschätzungsformeln und Rechnungsfehler	198
9.3 Tschebyscheffsche Quadraturformeln	200
9.4 Quadraturformeln von Gauß	202
9.5 Das Verfahren von Romberg	205
9.6 Adaptive Quadraturverfahren	207
9.7 Konvergenz der Quadraturformeln	207
10. Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung	208
10.1 Prinzip und Einteilung der numerischen Verfahren	208
10.2 Einschrittverfahren	209
10.2.1 Das Polygonzugverfahren von Euler-Cauchy	209
10.2.2 Das Verfahren von Heun (Praediktor-Korrektor-Verfahren)	210
10.2.3 Runge-Kutta-Verfahren	212
10.2.3.1 Allgemeiner Ansatz	212
10.2.3.2 Das klassische Runge-Kutta-Verfahren	213
10.2.3.3 Zusammenstellung expliziter Runge-Kutta-Verfahren	215

	Seite
10.2.4 Anfangswertproblemlöser	218
10.2.5 Implizite Runge-Kutta-Verfahren	218
10.3 Mehrschrittverfahren	220
10.3.1 Prinzip der Mehrschrittverfahren	220
10.3.2 Das explizite Verfahren von Adams-Bashforth	222
10.3.3 Das Praediktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Moulton	224
10.3.4 Weitere Praediktor-Korrektor-Formeln	227
10.3.5 Das Mehrschrittverfahren von Gear	228
10.4 Fehlerschätzungsformeln und Rechnungsfehler	230
10.4.1 Fehlerschätzungsformeln	230
10.4.2 Rechnungsfehler	232
10.5 Extrapolationsverfahren	233
10.6 Entscheidungshilfen bei der Wahl des Verfahrens	235
11. Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und bei Differentialgleichungen höherer Ordnung	236
11.1 Runge-Kutta-Verfahren	237
11.1.1 Allgemeiner Ansatz	237
11.1.2 Das klassische Runge-Kutta-Verfahren	237
11.1.3 Runge-Kutta-Verfahren für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung	241
11.1.4 Schrittweitensteuerung	242
11.1.5 Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren	243
11.1.5.1 Beschreibung des Verfahrens	243
11.1.5.2 Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung	245
11.2 Mehrschrittverfahren	248
11.3 Ein Mehrschrittverfahren für steife Systeme	251
12. Randwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen	253
12.1 Zurückführung des Randwertproblems auf ein Anfangswertproblem	253
12.1.1 Randwertprobleme für nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	253
12.1.2 Randwertprobleme für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	255
12.1.3 Mehrzielverfahren	257

	Seite
12.2 Differenzenverfahren	260
12.2.1 Das gewöhnliche Differenzenverfahren	260
12.2.2 Differenzenverfahren höherer Näherung	266
12.2.3 Iterative Auflösung der linearen Gleichungssysteme zu speziellen Randwertproblemen	268
12.2.4 Lineare Eigenwertprobleme	269
Anhang: MODULA 2-Programme	271
Verzeichnis der Programme	272
L Literaturverzeichnis	495
L.1 Lehrbücher und Monographien	495
L.2 Originalarbeiten	497
L.3 Aufgaben- und Formelsammlungen, Tabellenwerke, Programmbibliotheken	498
L.4 Ergänzungen zu L.1	499
L.5 Ergänzungen zu L.2	500
Sachregister	503