Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen 10

1 Ziele und Grundprinzipien der Numerischen Mathematik 11
1.1 Modell, Algorithmus, Computerexperiment 11
1.2 Grundprinzipien der Algorithmisierung 14

2 Direkte Verfahren für lineare Gleichungssysteme 19
2.1 Der Gaußsche Algorithmus 20
2.1.1 Die Grundform des Gaußschen Algorithmus 20
2.1.2 Pivotisierung 23
2.1.3 Gaußscher Algorithmus als LU-Faktorisierung 24
2.1.4 Direkte LU-Faktorisierungen und spezielle Matrizen . . . 26
2.2 Störungstheorie, Fehlerabschätzung, iterative Verbesserung . . . 30
2.3 Lineare Quadratmittelprobleme 33
2.3.1 Normalgleichungsverfahren 34
2.3.2 Orthogonalisierungsverfahren 34
2.4 Hinweise auf Software 39
2.5 Übungsaufgaben 40

3 Iterationsverfahren für Gleichungssysteme 41
3.1 Gewöhnliches Iterationsverfahren und Kontraktionssatz 41
3.2 Stationäre Einschrittverfahren für lineare Gleichungssysteme . . 45
3.2.1 Allgemeine Konvergenzaussagen 45
3.2.2 Basisiterationen: Jacobi, Gauß-Seidel und SOR 46
3.2.3 Richardson-Iteration und Vorkonditionierung 52
3.3 Krylov-Teilraum-Verfahren 54
3.3.1 Symmetrische positiv definite Systeme: CG 55
3.3.2 Unsymmetrische Systeme: CGNR, CGNE und GMRES . 58
3.4 Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme 60
3.4.1 Lineare Konvergenz und das Ostrowski-Theorem 60
3.4.2 Überlineare Konvergenz und Newton-Verfahren 63
3.4.3 Globalisierung 68
3.5 Hinweise auf Software 71
3.6 Übungsaufgaben 71

4 Eigenwertprobleme **73**
4.1 Transformationsverfahren 75
4.2 Teilraumiterationsverfahren 81
4.3 Hinweise auf Software 85
4.4 Übungsaufgaben 86

5 Interpolation und Approximation **87**
5.1 Interpolation 87
5.1.1 Interpolation mit Polynomen 88
5.1.2 Interpolation mit Splines 97
5.2 Approximation 109
5.2.1 Diskrete Quadratmittelapproximation 109
5.2.2 Weitere Approximationsprinzipien 114
5.3 Hinweise auf Software und ein Ausblick: Mehrdimensionale Interpolation und Approximation 117
5.4 Übungsaufgaben 118

6 Numerische Differentiation und Integration **119**
6.1 Differenzenformeln zur Differentiation 119
6.2 Zusammengesetzte Quadraturformeln 122
6.3 Erhöhung der Konvergenzordnung durch Extrapolation 125
6.4 Gauß-Formeln und verwandte optimale Quadraturformeln . . . 128
6.5 Übungsaufgaben 130

7 Anfangswertaufgaben **131**
7.1 Explizite Einschrittverfahren 132
7.1.1 Eine Analyse des Euler-Verfahrens 133
7.1.2 Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung 135
7.1.3 Konsistenz und Stabilität 137
7.1.4 Schrittweitensteuerung 140
7.2 Mehrschrittverfahren 142
7.2.1 Stabilität von Mehrschrittverfahren 144
7.2.2 Startwerte und Prädiktor-Korrektor-Verfahren 146
7.3 A-Stabilität und steife Systeme 147
7.3.1 A-Stabilität 147
7.3.2 Steife Systeme 154
7.4 Hinweise auf Software und ein Ausblick: Algebro-Differentialgleichungen 156
7.5 Übungsaufgaben 157

8 Randwertaufgaben **159**
8.1 Eine Einführung in die grundlegenden Diskretisierungstechniken 160
8.2 Spline-Kollokation 170
8.3 Die Methode der finiten Elemente 174
8.3.1 Der Ausgangspunkt der Methode 175
8.3.2 Beispiele von finiten Elementen und die Generierung des diskreten Problems 178
8.3.3 Grundwissen zum Konvergenzverhalten 184
8.3.4 Erweiterungen des Grundkonzeptes 189
8.3.5 Adaptive FEM 194
8.3.6 Das Mehrgitterprinzip 198
8.4 Raum und Zeit 201
8.4.1 Eindimensionale Wärmeleitung 202
8.4.2 Die Linienmethode 204
8.5 Hinweise auf Software 207
8.6 Übungsaufgaben 207

Literaturverzeichnis **211**

Sachwortverzeichnis **217**