
Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	x
1 Einleitung	1
2 Die Diskretisierung der Geometrie	5
2.1 Der Prozeß der Diskretisierung	5
2.2 Diskretisierungshinweise für die Praxis	6
3 Das Aufstellen der Approximationsgleichungen	9
3.1 Punkte im Inneren des Berechnungsgebiets	9
3.1.1 Endliche Differenzenapproximationen für Ableitungen	9
3.1.2 Die Differentialgleichung instationärer, mehrdimensionaler Wärmeleitung	11
3.1.2.1 Die Wärmeleitungsgleichung für ein-, zwei- und dreidimensionale Körper in kartesischen Koordinaten	11
3.1.2.2 Die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung für rotationssymmetrische Körper	15
3.1.2.3 Ein Beispiel: Zweidimensionale stationäre Wärmeleitung in Zylinderkoordinaten	18
3.1.3 Differenzgleichungen für stationäre Wärmeleitungsprobleme	23
3.1.4 Die explizite finite Differenzenapproximation	24
3.1.5 Die implizite finite Differenzenapproximation	25
3.1.6 Die allgemeine finite Differenzenapproximation	26
3.1.7 Das Crank-Nicolson-Verfahren	27
3.1.8 Das Exponential- und Power-law-Schema	28
3.1.9 Ein Beispiel: Verhalten der verschiedenen Differenzenschemen für eindimensionale instationäre Wärmeleitung	32
3.1.10 Das ADI-Verfahren	35
3.1.11 Zusammenstellung der Differenzgleichungen	37
3.2 Rand- und randnahe Punkte	37
3.2.1 Die verschiedenen Randbedingungen	38
3.2.1.1 Die Randbedingung 1. Art	38
3.2.1.2 Die Randbedingung 2. Art	38
3.2.1.3 Die Randbedingung 3. Art	39
3.2.2 Ermittlung von Wärmeübergangskoeffizienten	40
3.2.3 Randpunkte	42
3.2.3.1 Randpunkte an zweidimensionalen, geradlinig begrenzten Oberflächen	42
3.2.3.2 Randpunkte an zweidimensionalen, gekrümmten Oberflächen	47
3.2.4 Randnahe Punkte	51
3.2.5 Zusammenstellung der Differenzgleichungen	53

4 Die Lösung der linearen Gleichungssysteme	54
4.1 Direkte Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme	54
4.1.1 Einige Grundbegriffe aus der Matrizenrechnung	54
4.1.1.1 Quadratische Matrizen	54
4.1.1.2 Dünnesbedelte Matrizen	54
4.1.1.3 Bandmatrizen	54
4.1.1.4 Untere und obere Dreiecksmatrizen	55
4.1.1.5 Diagonaldominanz einer Matrix	56
4.1.1.6 Reguläre und singuläre Matrizen	56
4.1.1.7 Diagonalmatrix und Einheitsmatrix	56
4.1.1.8 Permutationsmatrix	56
4.1.1.9 Transponierte Matrix	56
4.1.1.10 Inverse Matrix	56
4.1.1.11 Symmetrische Matrix	57
4.1.1.12 Vektor- und Matrixnormen	57
4.1.2 Das Prinzip der direkten Verfahren: Die LU-Faktorisierung	58
4.1.3 Ein Beispiel zur LU-Faktorisierung	60
4.1.4 Der Gauß'sche Algorithmus (GA)	61
4.1.5 Das Gauß-Jordan-Verfahren (GJ)	64
4.1.6 Ein Beispiel zum Gauß'schen Algorithmus und Gauß-Jordan-Verfahren	65
4.1.7 Matrixinversion und Cramer'sche Regel	67
4.1.8 Die Lösung tridiagonaler Gleichungssysteme: Der Thomas-Algorithmus	68
4.1.9 Die Lösung pentadiagonaler Gleichungssysteme	69
4.1.10 Direkte Methoden für dünnbesiedelte Systeme	71
4.1.11 Die Genauigkeit der Lösung eines Gleichungssystems	72
4.1.11.1 Die Konditionszahl einer Matrix	72
4.1.11.2 Verbesserung der Kondition	73
4.1.11.3 Die Maschinengenauigkeit	74
4.2 Iterative Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme	75
4.2.1 Die Jacobi-Iteration (JI)	75
4.2.2 Die Gauß-Seidel-Iteration (GS)	77
4.2.3 Ein Beispiel zur Jacobi- und Gauß-Seidel-Iteration	77
4.2.4 Das sukzessive Überrelaxationsverfahren (SOR)	80
4.2.5 Ein Beispiel zur SOR-Methode	84
4.2.6 Ein kurzer Ausblick auf andere iterative Verfahren	85

5 Stabilität und Konvergenz	86
5.1 Begriffsdefinitionen	86
5.1.1 Fehler	86
5.1.2 Stabilität	86
5.1.3 Konsistenz und Konvergenz	87
5.2 Anwendung der Definitionen auf verschiedene Differenzenschemen	87
5.2.1 Fehler	87
5.2.2 Konvergenz	87
5.2.3 Stabilität	88
5.2.4 Ein Beispiel für die Instabilität eines Differenzenschemas	89
5.3 Numerische Oszillationen	90
5.3.1 Forderung der positiven Koeffizienten	90
5.3.2 Ein eindimensionales Beispiel für numerische Oszillationen	92
5.4 Auswahlkriterien für die verschiedenen Differenzenschemen	94
Anhang	97
A Ausgewählte thermophysikalische Stoffwerte	97
A.1 Feststoffe	97
A.2 Flüssigkeiten	103
A.3 Gase (bei 1 bar)	104
B Programmlistings	105
B.1 Zweidimensionale stationäre Wärmeleitung in Zylinderkoordinaten	105
B.2 Vergleich verschiedener eindimensionaler instationärer Differenzenschemen	111
B.3 Berechnung der Maschinengenauigkeit	118
B.4 Überprüfung der Diagonaldominanz einer Matrix	118
B.5 Gauß'scher Algorithmus mit teilweiser Pivotisierung	121
B.6 Tridiagonalsolver	123
B.7 Pentadiagonalsolver	124
B.8 Hadamard'sche Konditionszahl einer Matrix	125
B.9 Konditionszahl einer Matrix nach Forsythe et al.	128
B.10 SOR-Verfahren	132
B.11 Eindimensionale instationäre Wärmeleitung (explizit)	135