

# TABLE DES MATIÈRES

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE . . . . .	XIX
----------------------------------	-----

## PREMIÈRE PARTIE

### ESPACES VECTORIELS ET ALGÈBRES NORMÉS DE MATRICES

INTRODUCTION . . . . .	3
CHAPITRE 1.1. — <b>Rappels d'analyse fonctionnelle.</b> . . . . .	7
1. <i>Définitions des matrices</i> . . . . .	7
2. <i>Le modèle euclidien</i> . . . . .	9
3. <i>Ordre</i> . . . . .	10
4. <i>Métrie</i> . . . . .	12
4a. <i>Espaces métriques</i> . . . . .	12
4b. <i>Sommes directes. Espaces quotients</i> . . . . .	15
4c. <i>Produits tensoriels : 1. Formes bilinéaires; 2. Produits tensoriels</i> . . . . .	16
5. <i>Convexité</i> . . . . .	19
5a. <i>Jauges, semi-normes, normes</i> . . . . .	19
5b. <i>Inégalités fondamentales de convexité</i> . . . . .	22
5c. <i>Applications : 1. Espaces localement convexes; 2. Espaces localement convexes (partiellement) ordonnés; 3. Espaces de Hilbert</i> . . . . .	25
6. <i>Applications linéaires</i> . . . . .	35
6a. <i>Semi-normes et normes d'une application</i> . . . . .	36
6b. <i>Conditions d'inversion et norme de l'application inverse</i> . . . . .	37
6c. <i>Critères d'isomorphisme algébrique et topologique.</i> . . . . .	37
6d. <i>Modes de convergence des suites d'applications linéaires</i> . . . . .	38
6e. <i>Espaces vectoriels d'applications linéaires : 1. Espaces d'applications linéaires; 2. Espace conjugué ou espace dual; 3. Adjointe d'une application linéaire</i> . . . . .	38

6f. Algèbres d'opérateurs linéaires : 1. Algèbres normées et algèbres de Banach; 2. Inversion; 3. Spectre et résolvant; 4. Extension des applications holomorphes scalaires aux applications holomorphes vectorielles; 5. Valeurs et vecteurs propres des opérateurs complètement continus; 6. Valeurs et vecteurs propres des opérateurs complètement continus positifs . . . . .	41
6g. Opérateurs linéaires matriciels : 1. Opérateurs linéaires définis sur des espaces de dimension infinie ; 2. Opérateurs linéaires définis sur des espaces de dimension finie : a. Matrices d'opérateurs et d'opérateurs inverses; b. Projections; c. Dualité; d. Similitude; e. Produits tensoriel et de Kronecker; f. Produit de Hadamard . . . . .	48
<b>CHAPITRE 1.2. — Matrices normées par les normes de Hölder . . . . .</b>	<b>67</b>
1. L'espace vectoriel normé $M_{m,n}(\mathbf{K})$ des matrices rectangles sur $\mathbf{K}$ : Les normes $N_p$ ou normes de Hölder; Métrique; Convexité; Relations d'équivalence . . . . .	68
2. Sommes directes et produits tensoriels d'espaces normés de matrices . . . . .	71
3. Suites et séries de matrices . . . . .	72
4. Matrices approchées : problème de la meilleure approximation . . . . .	75
5. Matrices à éléments positifs . . . . .	77
6. L'algèbre normée $M_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées sur $\mathbf{K}$ : Produits normés de matrices carrées . . . . .	80
7. Inversion et convergence des séries de puissances dans $M_n(\mathbf{K})$ . . . . .	82
<b>CHAPITRE 1.3. — Matrices normées par les normes d'applications . . . . .</b>	<b>85</b>
1. L'espace vectoriel et l'algèbre normés des matrices associées aux applications et opérateurs linéaires . . . . .	86
1a. Normes d'applications . . . . .	86
1b. Définitions équivalentes . . . . .	88
1c. Propriétés. . . . .	89
1d. Explicitation . . . . .	93
1e. Relations d'équivalence . . . . .	95
1f. Propriétés de classes particulières d'opérateurs et de leurs matrices associées : 1. Opérateurs auto-adjoints; 2. Opérateurs auto-adjoints définis et semi-définis positifs; 3. Projecteurs perpendiculaires; 4. Isométries et isométries partielles; 5. Opérateurs normaux; . . . . .	97
2. Éléments de théorie spectrale . . . . .	109
2a. Le spectre : 1. Définitions et propriétés; 2. Transformées du spectre; 3. Rayon spectral; 4. Localisation des valeurs propres. Domaine de Gershgorin . . . . .	109

2b. Spectres de classes particulières d'opérateurs et de leurs matrices associées : 1. Opérateurs auto-adjoints; 2. Opérateurs auto-adjoints complètement continus et complètement continus positifs; 3. Opérateurs auto-adjoints définis et semi-définis positifs; 4. Projecteurs perpendiculaires; 5. Isométries et isométries partielles; 6. Opérateurs normaux . . . . .	119
3. Fonctions d'opérateurs et de matrices et approximation des équations fonctionnelles . . . . .	134
3a. Convergence et continuité . . . . .	135
3b. Fonctions analytiques d'opérateurs linéaires bornés sur des espaces normés complets complexes . . . . .	138
3c. Fonctions d'opérateurs sur des espaces de dimension finie : 1. Fonctions d'opérateurs; 2. Application aux opérateurs semi-définis positifs, aux opérateurs normaux, et à la commutativité . . . . .	140
3d. Séries de puissances : 1. Les matrices isométriques : théorème ergodique 2. La série de Neumann; 3. La série exponentielle . . . . .	144
3e. Différentielles de Fréchet et de Gâteaux . . . . .	149
3f. Approximation des équations fonctionnelles : 1. Solutions approchées; 2. Application à la réduction des systèmes linéaires infinis et à la convergence de la méthode de Ritz . . . . .	151
BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIÈRE PARTIE . . . . .	156

## DEUXIÈME PARTIE

## INVERSES DE MATRICES RECTANGLES

INTRODUCTION . . . . .	165
CHAPITRE 2.1. — Inverses définis comme inverses de demi-groupes inversifs . .	167
1. Cas des matrices de rang maximum . . . . .	167
1a. Conditions d'invariance . . . . .	167
1b. Conditions d'inversion . . . . .	168
1c. Conditions supplémentaires (pseudo-inverses) : 1. Identité des inverses à droite et à gauche, et commutativité de l'inversion et de la transposition conjuguée; 2. Réversibilité des inverses; 3. Hermiticité des éléments invariants . . . . .	170
1d. Permutation des lignes et des colonnes . . . . .	174
1e. Définition des pseudo-inverses . . . . .	175
1f. Propriétés des pseudo-inverses et des éléments invariants . . . . .	177

2. <i>Cas des matrices de rang non maximum</i> . . . . .	181
2a. Conditions de non-maximalité et décomposition en produit de matrices de rang maximum . . . . .	181
2b. Explicitation des pseudo-inverses des matrices de rang non maximum . . . . .	185
2c. Propriétés algébriques des pseudo-inverses et des éléments invariants des matrices de rang non maximum : 1. Propriétés; 2. Application à la représentation des matrices . . . . .	187
2d. Propriétés géométriques (1). Changement de bases : 1. Métrisation de l'espace; 2. Formules de changement de bases dans les cas de décomposition d'un espace en deux sous-espaces complémentaires; 3. Application aux pseudo-inverses . . . . .	205
2e. Propriétés géométriques (2). Projecteurs : 1. Représentations algébriques d'un sous-espace; 2. Projections d'un vecteur; Projecteurs et réflecteurs; 3. Espaces des vecteurs lignes et colonnes des pseudo-inverses et des éléments invariants; 4. Espaces des vecteurs propres d'une matrice carrée; cas des matrices $a^*a$ et $aa^*$ ; corrélation avec les espaces colonnes et lignes de $a$ et de ses matrices associées . . . . .	212
3. <i>Inverses de matrices rectangles et demi-groupes inversifs</i> . . . . .	222
<b>CHAPITRE 2.2. — Résolution de l'équation <math>axb = c</math></b> . . . . .	227
1. <i>Règles de simplification</i> . . . . .	227
2. <i>Relations équivalentes</i> . . . . .	227
3. <i>Résolution de l'équation <math>axb = c</math></i> . . . . .	228
4. <i>Interprétation géométrique dans le cas des pseudo-inverses de matrices rectangles</i> . . . . .	238
5. <i>Application des pseudo-inverses à la résolution numérique des systèmes linéaires carrés mal conditionnés par des méthodes directes</i> . . . . .	243
6. <i>Interprétation de la solution d'équations matricielles linéaires provenant de la discrétisation d'opérateurs différentiels et intégraux</i> . . . . .	259
<b>CHAPITRE 2.3. — Inverses définis en minimisation de normes</b> . . . . .	265
1. <i>Cas de la norme euclidienne. Minimisation en moyenne quadratique</i> . . . . .	268
1a. Pseudo-inverses ordinaires : 1. Cas des matrices de rang maximum; 2. Cas des matrices de rang non maximum; 3. Meilleure solution de l'équation $axb = c$ ; 4. Interprétation géométrique; 5. Meilleure solution d'un système soumis à des contraintes linéaires; 6. Meilleure solution de l'équation $ax = c$ relative à une base colonnes de $a$ . . . . .	271
1b. Pseudo-inverses pondérés : 1. Domaine de définition; 2. Interprétation géométrique; 3. Application à l'approximation polynomiale d'une fonction discrète, et remarques . . . . .	285

1c. Pseudo-inverses généralisés : 1. Domaine de définition; 2. Caractérisation du lissage et de la fidélité; 3. Application au lissage des approximations polynomiales; 4. Remarques sur le conditionnement et l'application des pseudo-inverses généralisés à la résolution des systèmes d'équations scalaires mal conditionnés . . . . .	299
2. <i>Extension aux applications linéaires définies dans des espaces de Hilbert</i> . . . . .	313
3. <i>Cas général des normes de Hölder</i> . . . . .	314
<b>CHAPITRE 2.4. — Calcul des pseudo-inverses</b> . . . . .	321
1. <i>Généralités</i> . . . . .	321
1a. Principes . . . . .	321
1b. Formules de partitionnement : 1. Cas des matrices carrées non singulières; 2. Cas des matrices rectangles augmentées d'une colonne ou d'une ligne; 3. Cas général d'un partitionnement vertical ou horizontal quelconque . . . . .	329
1c. Détermination de bases des espaces lignes et colonnes d'une matrice et de leurs espaces complémentaires. Bases orthogonales : 1. Dépendance et indépendance linéaire, bases, rang, rappels; 2. Orthonormalisation d'un système de vecteurs; Méthodes de Gram-Schmidt et de Householder . . . . .	336
1d. Mise en compatibilité d'une équation; Transformation d'une matrice par adjonction, pondération ou changement d'axes; Rappels; Réduction par élimination de Ben-Israel et Wersan . . . . .	358
2. <i>Méthodes directes</i> . . . . .	367
2a. Méthodes de partitionnement : 1. Méthodes de Greville et de Rosen. Application à la détermination d'une base colonnes ou lignes d'une matrice et de son pseudo-inverse; 2. Méthode de biorthogonalisation de Hestenes . . . . .	369
2b. Méthodes d'orthogonalisation; Meilleure solution et meilleure solution relative à une base colonnes . . . . .	376
2c. Méthodes de projection et de gradient; Méthode du gradient conjugué de Hestenes et Stiefel . . . . .	384
2d. Méthodes basées sur des développements finis de $a^{-1}$ ; Méthode des traces . . . . .	397
3. <i>Méthodes itératives</i> . . . . .	398
3a. Méthodes de projection et de gradient . . . . .	400
3b. Méthodes basées sur des développements infinis de $a^{-1}$ ; Méthodes de Newton ou de Schulz-Hotelling-Bodewig et de Schröder . . . . .	417
<b>BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIÈME PARTIE</b> . . . . .	428