

# INHALT

<b>1.</b>	<b>Elementare Eigenschaften von Matrizen . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1.	Allgemeine Theorie . . . . .	13
1.1.1.	Definition des Vektorraumes . . . . .	13
1.1.2.	Lineare Abbildungen . . . . .	14
1.1.3.	Lineare Abbildungen von $R^n$ in $R^m$ (bzw. von $C^n$ in $C^m$ ) . . . . .	15
1.2.	Matrizenrechnung . . . . .	18
1.2.1.	Summe zweier Matrizen . . . . .	18
1.2.2.	Multiplikation mit einer Zahl . . . . .	20
1.2.3.	Das Produkt von zwei Matrizen . . . . .	21
1.2.4.	Produkte spezieller Matrizen . . . . .	25
1.2.4.1.	Dreiecksmatrizen . . . . .	25
1.2.4.2.	Basismatrizen . . . . .	26
1.2.5.	Numerische Berechnung des Matrizenproduktes . . . . .	29
1.2.6.	Aus einer gegebenen Matrix abgeleitete Matrizen . . . . .	31
1.2.6.1.	Transponierte Matrix . . . . .	31
1.2.6.2.	Konjugierte und adjungierte Matrizen (über $C$ ) . . . . .	32
<b>2.</b>	<b>Vektor- und Matrizennormen . . . . .</b>	<b>33</b>
2.1.	Grundlegende Eigenschaften . . . . .	33
2.1.1.	Definition der Norm . . . . .	33
2.1.2.	Beispiele für Vektornormen . . . . .	33
2.1.3.	Matrizennormen . . . . .	36
2.1.4.	Vergleich der Hölderschen Normen $\varphi_p(x)$ ( $p \geq 1$ ) . . . . .	36
2.1.5.	ALGOL-Prozedur zur Berechnung von drei Matrizennormen . . . . .	38
2.1.6.	Definition „geometrischer“ Normen . . . . .	39
2.1.7.	„Geometrische“ Matrizennormen . . . . .	41
2.1.8.	Matrizennormen in $\mathcal{M}_{(n,n)}$ (quadratische Matrizen) . . . . .	44
2.1.9.	$R^n$ (bzw. $C^n$ ) als Hilbertraum . . . . .	46
<b>3.</b>	<b>Invertierung von Matrizen — Theorie . . . . .</b>	<b>51</b>
3.1.	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren . . . . .	51
3.1.1.	Definition der linearen Unabhängigkeit . . . . .	51
3.1.2.	Erzeugendensysteme . . . . .	51
3.1.3.	Definition der Basis . . . . .	51

3.2.	Hauptsatz über die Existenz von Lösungen eines homogenen linearen Systems mit mehr Unbekannten als Gleichungen . . . . .	52
3.2.1.	Lineare Gleichungssysteme. Bezeichnungen . . . . .	52
3.2.2.	Beweis des Hauptsatzes . . . . .	53
3.3.	Dimension. . . . .	54
3.4.	Isomorphie des $R^n$ (bzw. $C^n$ ) zu jedem Vektorraum über $R$ (bzw. $C$ ) von endlicher Dimension $n$ . . . . .	55
3.5.	Umkehrbarkeit einer linearen Abbildung von $R^n$ in $R^m$ (bzw. von $C^n$ in $C^m$ ) . . . . .	56
3.6.	Linearität der inversen Abbildung einer umkehrbaren linearen Abbildung. Inverse Matrix . . . . .	57
3.7.	Indikator der linearen Unabhängigkeit . . . . .	58
3.8.	Eigenschaften der Determinanten. . . . .	63
3.9.	Existenz und Konstruktion von Determinanten . . . . .	65
3.10.	Formeln und Definitionen . . . . .	66
3.11.	Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Invertierbarkeit einer Matrix $A$ aus $\mathcal{M}_{(n,n)}$ . . . . .	66
3.12.	Invertierbarkeit und Norm . . . . .	68
3.13.	Lösung eines linearen Systems (Theorie). . . . .	70
<b>4.</b>	<b>Direkte Lösungsmethoden für lineare Systeme . . . . .</b>	<b>71</b>
4.1.	Diagonalsysteme . . . . .	71
4.2.	Dreieckssysteme . . . . .	71
4.3.	Invertierung von Dreiecksmatrizen . . . . .	75
4.3.1.	Allgemeines Prinzip. . . . .	75
4.3.2.	Dreiecksmatrizen . . . . .	75
4.4.	Allgemeiner Fall: Der Gaußsche Algorithmus oder die Methode der einfachen Elimination . . . . .	77
4.4.1.	Einführung . . . . .	77
4.4.2.	Satz . . . . .	77
4.4.3.	Zerlegung einer Matrix aus $\mathcal{M}_{(n,n)}$ in ein Produkt $TA'$ . . . . .	80
4.4.4.	Darstellung verschiedener Grundbegriffe der „normalen“ Elimination (mit von Null verschiedenen Diagonalelementen) . . . . .	83
4.5.	Der Gaußsche Algorithmus zur Lösung eines linearen Systems. Einfache Elimination; Rechenschema . . . . .	85
4.6.	Verbesserter Gaußscher Algorithmus. Das Verfahren von CROUT . . . . .	90
4.7.	Die Methode von JORDAN (Diagonalisierungsverfahren. Vollständige Elimination) . . . . .	93
4.7.1.	Theorie . . . . .	93
4.7.2.	Rechenschritte. . . . .	95
4.8.	Orthogonalisierungsmethoden. Schmidtsches Verfahren . . . . .	97
4.8.1.	Definitionen . . . . .	97
4.8.2.	Quadratische Matrizen . . . . .	97
4.8.3.	Invarianz des Skalarproduktes . . . . .	98
4.8.4.	Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren. . . . .	99
4.8.5.	Lösung eines linearen Systems durch Zeilenorthogonalisierung . . . . .	103
4.8.6.	Flußdiagramm des (Zeilen-)Orthogonalisierungsverfahrens . . . . .	104
4.8.7.	Die Matrizen der unitären Gruppe von $\mathcal{M}_{(n,n)}$ . Rotationsmethode . . . . .	106
4.8.7.1.	Der Rotationsalgorithmus . . . . .	107

4.8.7.2.	Bedeutung der Rotationsmethode . . . . .	108
4.8.7.3.	Anwendung: Erzeugende der unitären Gruppe . . . . .	108
4.9.	Anwendung der allgemeinen direkten Verfahren zur Invertierung einer Matrix	109
4.9.1.	Gaußscher Algorithmus . . . . .	109
4.9.2.	Jordansches Verfahren . . . . .	113
4.9.3.	Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	113
4.10.	Berechnung von Determinanten . . . . .	113
4.11.	Systeme mit symmetrischen Matrizen . . . . .	115
4.11.1.	Gaußscher Algorithmus . . . . .	115
4.11.2.	Jordansches Verfahren . . . . .	116
4.11.3.	Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	116
4.11.4.	Die Methode von CHOLESKY. Nichtsinguläre symmetrische Matrizen . . . . .	116
4.11.4.1.	Theorie . . . . .	116
4.11.4.2.	Der Algorithmus von CHOLESKY . . . . .	120
4.12.	Teilmatrizenverfahren . . . . .	123
4.12.1.	Zerlegungstechnik . . . . .	123
4.13.	Ergänzungsverfahren . . . . .	124
	<b>Aufgaben zu den Kapiteln 1—4 . . . . .</b>	<b>126</b>
<b>5.</b>	<b>Indirekte Lösungsmethoden . . . . .</b>	<b>130</b>
5.1.	Iteration und Relaxation . . . . .	130
5.1.1.	Prinzip . . . . .	130
5.1.2.	Relaxation (bezüglich einer Komponente) . . . . .	132
5.1.2.1.	Die Methode von SOUTHWELL . . . . .	135
5.1.2.2.	Die Methode von GAUSS-SEIDEL . . . . .	141
5.1.2.3.	Überrelaxationsverfahren . . . . .	144
5.2.	Lineare Iteration. . . . .	148
5.2.1.	Iteration bezüglich einer Zerlegung von $A$ . . . . .	148
5.2.2.	Konvergenz der linearen Iterationsverfahren. . . . .	151
5.2.3.	Anwendungen . . . . .	155
5.2.3.1.	Aus dem Satz von HADAMARD abgeleitete hinreichende Bedingungen . . . . .	156
5.2.3.2.	Untersuchung der Überrelaxation für hermitesche Matrizen über $C$ (bzw. symmetrische Matrizen über $R$ ) . . . . .	158
5.2.3.3.	Sätze zur Lokalisierung von Eigenwerten . . . . .	161
5.3.	Iterationen durch Projektionsmethoden . . . . .	162
5.3.1.	Geometrische Interpretation . . . . .	162
5.3.2.	Zerlegung einer allgemeinen Norm . . . . .	163
5.3.3.	Projektionen auf die zu $A^T z_r$ normalen Ebenen . . . . .	165
5.3.4.	Beispiele . . . . .	166
5.3.4.1.	Projektionen auf Ebenen, die dem betragsgrößten Residuum entsprechen . . . . .	166
5.3.4.2.	Projektionen, die der Zerlegung der Norm $\varphi_1$ im dritten Beispiel aus 5.3.2. entsprechen . . . . .	168
5.3.4.3.	Ein der Zerlegung von $\varphi_2 = \ \cdot\ $ entsprechendes Verfahren . . . . .	169
5.3.5.	Das Verfahren von CIMMINO . . . . .	170
5.4.	Iterationen für Systeme mit symmetrischer Matrix . . . . .	172
5.4.1.	Einführung . . . . .	172
5.4.2.	Beispiele . . . . .	175

5.4.2.1.	Relaxationsmethoden (für $A^T = A$ ).	175
5.4.2.2.	Methode des stärksten Abstiegs	176
5.4.2.3.	Gradientenmethode	179
5.4.2.4.	Methode der konjugierten Gradienten (Methode von STIEFEL-HESTENES).	180
5.5.	Bemerkungen (für den Fall nichtsymmetrischer Systeme)	185
5.6.	Bemerkungen zur Konvergenz und Konvergenzverbesserung	186
5.7.	Verbesserung der Elemente einer inversen Matrix (HOTELLING-BODEWIG).	187
	<b>Aufgaben zu Kapitel 5</b>	<b>190</b>
<b>6.</b>	<b>Invariante Unterräume</b>	<b>194</b>
6.1.	Einführung	194
6.2.	Invariante Unterräume	196
6.3.	Polynomtransformationen	197
6.4.	Invariante Unterräume und Polynomtransformationen	198
6.5.	Diagonalform	205
6.6.	Das charakteristische Polynom	208
6.7.	Polynommatrizen. Elementarteiler von Polynommatrizen	209
6.8.	Normalformen. Basen bezüglich einer linearen Transformation	214
6.8.1.	$\sigma$ -Basen in $\mathcal{E}_n$	214
6.8.2.	Satz über die Existenz eines Erzeugendensystems	215
6.8.3.	Die erste Normalform	218
6.8.4.	Beziehungen zwischen der Normalform und den Teilern des Minimalpolynoms von $\sigma$	220
6.8.5.	Zweite Normalform (Jordansche Normalform)	221
6.9.	Funktionen von linearen Transformationen (Matrizenfunktionen)	225
6.9.1.	Elementare Eigenschaften. Wert einer Funktion auf einem Spektrum	225
6.9.2.	Definition einer Funktion durch Interpolationsformeln	227
6.9.3.	Eigenschaften	228
6.9.4.	Reihendarstellung von Matrizenfunktionen	232
6.9.5.	Anwendungen	233
<b>7.</b>	<b>Anwendung der Eigenschaften invarianter Unterräume</b>	<b>236</b>
7.1.	Der Satz von SCHUR und Schlußfolgerungen	236
7.1.1.	Der Satz von SCHUR	236
7.1.2.	Schlußfolgerungen aus dem Satz von SCHUR	239
7.2.	Polare Zerlegung	239
7.2.1.	Einführung	239
7.2.2.	Normale Matrizen	241
7.3.	Matrizen mit nichtnegativen Elementen	242
7.4.	Graphentheorie und Matrizen mit positiven Elementen	254
7.4.1.	Der zu einer Matrix mit positiven Elementen gehörige orientierte Graph	254
7.4.1.1.	Definition	254
7.4.1.2.	Der zu einer Matrix gehörige Graph	254
7.4.2.	Zusammenhang	255
7.4.3.	Orientierte Graphen nichtnegativer Matrizen	258
7.5.	Vergleich der klassischen linearen Iterationen	260
7.5.1.	Wiederholung und Bezeichnungen	260

7.5.2.	Spektralradien von $\mathcal{L}_\omega$ . . . . .	262
7.6.	Die Young-Frankelsche Theorie der Überrelaxation. . . . .	265
7.6.1.	Definitionen . . . . .	265
7.6.2.	Der Satz von YOUNG . . . . .	266
7.6.3.	Problemstellung . . . . .	272
7.7.	Die Polynommethode. Das Verfahren von PEACEMAN-RACHFORD . . . . .	273
7.7.1.	Die Polynommethode . . . . .	273
7.7.2.	Das Überrelaxationsverfahren von PEACEMAN-RACHFORD . . . . .	275
7.7.3.	Das Minimierungsproblem . . . . .	277
7.8.	Approximation des Spektralradius einer Matrix über eine Norm . . . . .	277
<b>8.</b>	<b>Numerische Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren . . . . .</b>	<b>283</b>
8.1.	Methoden zur direkten Bestimmung der charakteristischen Gleichung . . . . .	283
8.1.1.	Methoden, denen die Berechnung von $\text{Det}(A - \lambda I) = F(\lambda)$ zugrunde liegt . . . . .	283
8.1.2.	Direkte Anwendung des Satzes von CAYLEY-HAMILTON (KRYLOW, FRAZER, DUNCAN, COLLAR) . . . . .	284
8.1.3.	Die Methode von LEVERRIER. . . . .	286
8.1.4.	Die Methode von SOURIAU (Methode von FADDEJEW-FRAME). . . . .	289
8.1.5.	Die Methode von SAMUELSON . . . . .	290
8.1.6.	Die Zerlegungsmethode . . . . .	292
8.2.	Bestimmung des charakteristischen Polynoms mit Hilfe von Ähnlichkeitstransformationen . . . . .	294
8.2.1.	Der Fall nicht notwendig symmetrischer Matrizen . . . . .	294
8.2.1.1.	Ähnlichkeitstransformationen durch Matrizen mit Minimalpolynomen zweiten Grades . . . . .	294
8.2.1.2.	Die Methode von LANZOS. . . . .	309
8.2.2.	Der Fall symmetrischer Matrizen $A$ aus $\mathcal{M}_{(n,n)}(R)$ (Methode von GIVENS) . . . . .	316
8.2.2.1.	Givenssche Transformationen . . . . .	317
8.2.2.2.	Das charakteristische Polynom einer symmetrischen dreidiagonalen Matrix . . . . .	319
8.2.2.3.	Bestimmung der Eigenvektoren . . . . .	321
8.3.	Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren durch Iterationsverfahren (für nicht notwendig symmetrische Matrizen) . . . . .	325
8.3.1.	Die Potenzmethode. . . . .	325
8.3.2.	Das Abspaltungsverfahren . . . . .	329
8.3.2.1.	Abspaltungen bezüglich der Matrix . . . . .	330
8.3.2.2.	Abspaltung bezüglich der Anfangsvektoren . . . . .	331
8.4.	Hermiteische (bzw. symmetrische) Matrizen . . . . .	332
8.4.1.	Methode von JACOBI . . . . .	332
8.4.1.1.	Jacobischer Algorithmus . . . . .	337
8.4.1.2.	Praktische Durchführung . . . . .	338
8.4.2.	Die Methode von RUTISHAUSER . . . . .	340
8.4.2.1.	Erläuterung der allgemeinen $LR$ -Methode . . . . .	340
8.4.2.2.	Die Konvergenz der Folge $\{A_k\}$ . . . . .	341
	<b>Aufgaben zu den Kapiteln 6—8 . . . . .</b>	<b>347</b>
	<b>Literatur . . . . .</b>	<b>355</b>
	<b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>356</b>