

# Inhalt

<b>1. Euklidischer Vektorraum. Normen. Quadratische Formen. Symmetrisch-definite Gleichungssysteme</b>	
1.1. Der lineare Vektorraum, Matrizen . . . . .	11
1.1.1. Der $n$ -dimensionale Vektorraum . . . . .	11
1.1.2. Lineare Transformationen. Matrizen . . . . .	13
1.2. Normen, Kondition einer Matrix . . . . .	17
1.3. Notwendige und hinreichende Kriterien für die Definitheit einer quadratischen Form . . . . .	23
1.3.1. Direkte Kriterien, notwendige Bedingungen . . . . .	23
1.3.1.1. Spezielle Beispiele . . . . .	23
1.3.1.2. Notwendige Bedingungen . . . . .	24
1.3.2. Kriterium der überwiegenden positiven Diagonalelemente . . . . .	25
1.3.3. Systematische Reduktion auf eine Summe von Quadraten . . . . .	28
1.4. Symmetrische Dreieckszerlegung, Methode von Cholesky . . . . .	31
1.4.1. Dreiecksmatrizen . . . . .	31
1.4.2. Die Methode von Cholesky . . . . .	34
1.4.3. Auflösung symmetrisch-definiter Gleichungssysteme . . . . .	36
1.4.4. Inversion einer positiv definiten Matrix . . . . .	40
1.4.5. Symmetrisch-definite Bandmatrizen . . . . .	41
<b>2. Relaxationsmethoden</b>	
2.1. Grundlagen der Relaxationsrechnung . . . . .	45
2.1.1. Symmetrisch-definites Gleichungssystem als Minimumproblem . . . . .	45
2.1.2. Grundprinzip der Relaxation . . . . .	46
2.2. Das Einzelschrittverfahren . . . . .	48
2.2.1. Handrelaxation . . . . .	48
2.2.2. Das Einzelschrittverfahren (Gauß-Seidel) . . . . .	50
2.2.3. Methode der Überrelaxation . . . . .	55
2.2.4. Optimale Wahl des Überrelaxationsfaktors . . . . .	59
2.3. Gradientenmethoden . . . . .	66
2.3.1. Das Prinzip . . . . .	66
2.3.2. Methode des stärksten Abstiegs . . . . .	67
2.3.3. Das Gesamtschrittverfahren . . . . .	68

2.4. Methode der konjugierten Gradienten . . . . .	71
2.4.1. Herleitung . . . . .	71
2.4.2. Eigenschaften und Vereinfachungen . . . . .	72
2.4.3. Der Rechenprozeß . . . . .	75
<b>3. Ausgleichsrechnung</b>	
3.1. Problemstellung . . . . .	78
3.1.1. Vermittelnde Ausgleichung . . . . .	79
3.1.2. Bedingte Ausgleichung . . . . .	81
3.2. Vermittelnde Ausgleichung . . . . .	82
3.2.1. Die Gaußschen Normalgleichungen . . . . .	82
3.2.2. Zur Auflösung der Normalgleichungen . . . . .	84
3.3. Bedingte Ausgleichung . . . . .	87
3.3.1. Die Korrelatengleichungen . . . . .	87
3.3.2. Dualität der Ausgleichung . . . . .	90
3.4. Die Methode der Orthogonalisierung in der Ausgleichsrechnung	93
3.4.1. Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	93
3.4.2. Anwendung auf Ausgleichsprobleme . . . . .	96
3.4.3. Numerische Gegenüberstellung mit der Methode von Cholesky. . . . .	100
3.5. Die Methode der konjugierten Gradienten in der Ausgleichsrechnung . . . . .	103
<b>4. Symmetrische Eigenwertprobleme</b>	
4.1. Eigenwertprobleme der Physik . . . . .	103
4.2. Kritik des charakteristischen Polynoms . . . . .	106
4.3. Das Hauptachsentheorem . . . . .	109
4.4. Transformation auf Diagonalform. Simultane Berechnung aller Eigenwerte . . . . .	113
4.4.1. Elementare orthogonale zweidimensionale Drehungen . . . . .	113
4.4.2. Das klassische Jacobi-Verfahren . . . . .	116
4.4.3. Zyklische Jacobi-Verfahren . . . . .	123
4.5. Transformation auf tridiagonale Form. Sturmsche Kette. Berechnung einzelner Eigenwerte . . . . .	126
4.5.1. Die Methode von Givens . . . . .	127
4.5.2. Die Methode von Householder . . . . .	129
4.5.3. Die Sturmsche Kette . . . . .	134
4.5.4. Die Eigenwerte von symmetrischen tridiagonalen Matrizen	137
4.5.5. Die Eigenvektoren von tridiagonalen Matrizen . . . . .	144
4.6. LR-Transformation und QD-Algorithmus. Berechnung der kleinsten Eigenwerte . . . . .	146
4.6.1. Die LR-Transformation . . . . .	147

4.6.2. Konvergenzbeweis des LR-Cholesky-Verfahrens . . . . .	150
4.6.3. Konvergenzverhalten, Koordinatenverschiebung . . . . .	152
4.6.4. Symmetrisch-definite Bandmatrizen . . . . .	160
4.6.5. Der QD-Algorithmus . . . . .	163
4.6.6. Anwendungen des QD-Algorithmus . . . . .	172
4.7. Vektoriteration. Größte und kleinste Eigenwerte . . . . .	175
4.7.1. Klassische Vektoriteration. Potenzmethode . . . . .	176
4.7.2. Bestimmung des zweitgrößten Eigenwertes . . . . .	179
4.7.3. Inverse Vektoriteration . . . . .	180
4.7.4. Simultane Vektoriteration . . . . .	182
4.8. Das allgemeine symmetrische Eigenwertproblem . . . . .	187
4.8.1. Transformation auf ein spezielles symmetrisches Eigenwertproblem . . . . .	187
4.8.2. Jacobische Methode . . . . .	188
4.8.3. Methode der Vektoriteration . . . . .	190
4.9. Übersicht über die Eigenwertmethoden . . . . .	191
<b>5. Randwertprobleme, Relaxation</b>	
5.1. Randwertprobleme . . . . .	193
5.1.1. Die Energiemethode . . . . .	193
5.1.2. Selbstadjungiertheit . . . . .	195
5.1.3. Diskretisation . . . . .	197
5.1.4. Struktur der linearen Gleichungen . . . . .	203
5.2. Operatorgleichungen und Relaxation . . . . .	206
5.2.1. Elementare Relaxationsmethoden . . . . .	206
5.2.2. Überrelaxation, Property A . . . . .	208
5.2.3. Implizite Blockrelaxation . . . . .	216
5.2.4. Methode der alternierenden Richtungen . . . . .	223
5.2.5. Methode der konjugierten Gradienten . . . . .	231
5.3. Das Eigenwertproblem . . . . .	232
<b>Anhang A: Die Methode der konjugierten Gradienten in der Ausgleichsrechnung . . . . .</b>	<b>235</b>
<b>Anhang B: Aufgaben . . . . .</b>	<b>240</b>
<b>Literatur . . . . .</b>	<b>253</b>
<b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>257</b>