

Inhaltsverzeichnis

1	Hinweise zur Programmsammlung	
1	BASIC-Programme	2
1.1	BASIC-Unterprogramme	3
1.2	Erkennung der Grafikkarte	3
1.3	Beschriftung einer Zeichnung	4
1.4	Dateneingabe	4
1.5	Funktionendefinitionen	4
2	Mathematische Grundlagen	
1	Mengen	8
2	Gruppen	10
3	Ringe/Körper	12
4	Ungleichungen	14
5	Folgen/Reihen	15
6	Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen	16
7	Differentialrechnung	19
8	Arten der Stetigkeit/Differenzierbarkeit	22
9	Integralrechnung	23
10	Fehlerrechnung	25
10.1	Konditionsproblem	25
10.2	Stabilität	26
10.3	Beispiele zu numerischen Fehlern	26
11	Zahlendarstellung	29
11.1	Ganzzahldarstellung (Integer)	29
11.2	Fixpunktdarstellung	29
11.2.1	ASCII-Verschlüsselung (gezont)	30
11.2.2	BCD-Verschlüsselung (gepackt)	30
11.3	Gleitpunktdarstellung	30
3	Funktionen	
1	Funktionen	38
1.1	Definition des Funktionenbegriffs	38
1.2	Koordinatensysteme	41

1.2.1	Kartesische Koordinaten	41
1.2.2	Polarkoordinaten	41
1.2.3	Toroidkoordinaten	42
1.2.4	Kugelkoordinaten	42
1.2.5	Komplexe Transformationen	43
1.2.6	Parameterdarstellung	45
1.2.7	Weitere Koordinatensysteme	45
2	Eigenschaften von Funktionen	47
2.1	Stetigkeit	47
2.2	Differenzierbarkeit	51
3	Funktionszeichenprogramm	54
3.1	Vorüberlegungen	54
3.2	Grundfunktionen zum Zeichnen	57
3.3	16-Punkte-Rezept zur Programmentwicklung	61
3.4	Erweiterte Zeichenprogramme	74
3.4.1	Kartesische Koordinaten (einfach- /doppellogarithmisch)	74
3.4.2	Polarkoordinaten	76
3.4.3	Parametrische Darstellung	79
3.4.4	Zusatzprogramme	84
4	Kurvendiskussion	86
4.1	Nullstellenbestimmung	87
4.1.1	Direktes Verfahren	90
4.1.2	Newton-Verfahren (Tangentenverfahren)	100
4.1.3	Vereinfachtes Newton-Verfahren	105
4.1.4	Regula-falsi-Verfahren (Sekantenverfahren)	107
4.1.5	Intervallhalbierungsverfahren	109
4.1.6	Wo liegen die Vor- und Nachteile der verschiedenen Lösungsmöglichkeiten?	111
4.1.7	Abbruchbedingung	114
4.1.8	Weitere Nullstellensuchverfahren	119
4.1.8.1	Wegstein-Verfahren	119
4.1.8.2	Müller-Verfahren	121
4.1.8.3	Aitken-Verfahren	123
4.1.9	Aufgaben zur Nullstellensuche	127
4.2	Extremwertsuche	129
4.2.1	Numerisches Differentiation	130
4.2.2	Numerische Suchstrategien	130
4.2.2.1	Direktes Suchen	13
4.2.2.2	Intervalldrittellung	131
4.2.2.3	Nichtäquidistante Teilung	133
4.2.2.4	Mehr als drei Teilpunkte	134

4.3	Extremwertsuche bei Funktionen mit zwei Veränderlichen	134
4.3.1	Gitternetzmethode	134
4.3.2	Gradientenverfahren	138
4.4	Gradient von Funktionen dreier Veränderlicher	139
5	Wichtige Funktionen	140
6	Polynome	145
6.1	Definition	145
6.2	Eigenschaften	145
6.3	Nullstellen	148
6.4	Programmtechnische Bemerkungen	149
6.5	Kondition	150
6.6	Besondere Polynome	151
6.6.1	Tschebyscheff-Polynome	151
6.6.2	Legendre-Polynome	153
6.7	Aufgaben zu den Polynomen	155
4	Gleichungssysteme	
1	Beispiele für den Einsatz von Gleichungssystemen	158
2	Grundlagen der Lösung von Gleichungssystemen	160
2.1	Kondition	161
3	Lösungsalgorithmen für lineare Gleichungssysteme	167
3.1	Direkte Lösungsverfahren	167
3.1.1	Gauß-Algorithmus	167
3.1.2	Stiefel-Algorithmus	175
3.2	Indirekte Lösungsverfahren	178
3.2.1	Nachiteration	178
3.2.2	Gauß/Seidel-Verfahren	179
3.3	Lösungsverfahren in Sonderfällen	184
3.3.3	Cholesky-Verfahren für symmetrische Gleichungssysteme	184
3.3.2	Auflösung komplexer Gleichungssysteme	188
4	Diophantische Gleichungen	190
5	Matrizenrechnung	
1	Matrizenoperationen	193
1.1	Grundlagen	193
1.2	Matrizenaddition	197
1.3	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	197
1.4	Matrizenmultiplikation	198
1.5	Einheitsmatrix	201

1.6	Transponierte Matrix	202
1.7	Determinante	202
1.8	Unterdeterminanten, algebraische Komplemente	205
1.9	Adjungierte Matrix	207
1.10	Inverse einer Matrix (Kehrmatrix)	207
1.11	Symmetrische, hermitesche Matrizen	213
1.12	Orthogonale Matrizen	214
1.13	Untermatrizen	216
1.14	Matrizentransformationen/Matrizenzerlegungen	218
1.15	Eigenwerte	219
1.16	Kanonische Diagonalform	222
1.17	Orthogonale Transformation in Diagonalform	223
2	Matrixinversion	226
2.1	Direkte Matrixinversion	226
2.1.1	Gauß-Verfahren	226
2.1.2	Inversion gestörter Matrizen	227
2.2	Indirekte Matrixinversion	230
2.2.1	Schulz-Verfahren	230
3	Testmatrizen	232
3.1	Schlecht konditionierte Matrizen	232
3.2	Orthogonal-/Orthonormalmatrizen	233
4	Matrizenfunktionen	235
4.1	Grundlagen	235
4.2	Allgemeine Matrizenfunktionen	238
6	Eigenwerte	
1	Beispiel für Eigenwertprobleme	249
2	Eigenwerte	251
3	Lösungsverfahren zur Bestimmung von Eigenwerten	253
3.1	Direkte Verfahren	253
3.1.1	Souriau-Faddejew-Algorithmus	253
3.2	Indirekte Verfahren	256
3.2.1	Abspalten des dominanten Eigenwertes	256
3.2.2	Abspalten eines beliebigen Eigenwertes	257
3.2.3	Abspalten mehrerer Eigenwerte	258
3.2.4	Eigenwertbestimmung über die Hessenberg-Form	258
3.3	Lösungsverfahren in Sonderfällen	265
3.3.1	Tridiagonalisierung nach dem Householder-Algorithmus	265
3.3.2	Bisektionsalgorithmus	268
4	Eigenwertabschätzung	270

7	Interpolation	
1	Interpolation mit stückweise stetigen Funktionen	276
1.1	Lineare/quadratische Interpolation	276
1.2	Spline-Interpolation	279
1.2.1	Spline-Interpolation in kartesischen Koordinaten	279
1.2.2	Eigenschaften der Spline-Interpolation	285
1.2.3	Parametrische Splines	287
1.2.4	Spline-Interpolation mit m Stützstellen	292
1.2.5	Programmtechnische Bemerkungen	294
1.2.6	Übungen zur Spline-Interpolation	297
1.3	Bezier-Interpolation	298
1.3.1	Allgemeine Vorbetrachtungen	298
1.3.2	Parametrische Bezier-Interpolation	301
1.3.3	Zusammenhang zw. Bezier- und Spline Interpolation	304
1.3.4	Parametrische Bezier-Interpolation mit m Stützpunkten	305
1.3.5	Programmtechnische Bemerkungen	306
1.3.6	Konvexe Hülle eines Vierecks	312
1.4	Herleitung der Interpolationspolynome 3. Grades	313
1.5	Bezier-Kurven höherer Ordnung	317
1.5.1	Untersuchung der Grundlagen	317
1.5.2	Bezier-Kurven höherer Ordnung mehrere Intervalle	319
1.6	B-Spline-Kurven	321
2	Interpolation mit im ganzen Intervall stetigen Funktionen	324
2.1	Lagrange-Interpolation	324
2.1.1	Programmtechnische Bemerkung	327
2.2	Newton-Interpolation	331
8	Approximation	
1	Approximation von Punktwolken	337
1.1	Approx. durch eine im ganzen Intervall def. Funktion	337
1.1.1	Gütekriterien für die Approximation	338
1.1.2	Gauß-Appr. für Linearkombinationen v. Basisfunktionen	340
1.1.3	Linearisierung von Basisfunktionen	350
1.1.4	Empirische Funktionen	351
1.2	Approximation mit stückweise stetigen Funktionen	363
1.2.1	Gleitende Durchschnitte	363
1.2.2	Spline-Approximation durch stückweise definierte Funktionen	367

2	Funktionenapproximation	368
2.1	Lokale Approximation	368
2.1.1	Potenzreihen-Approximation (Taylor-Reihe)	368
2.1.2	Nichtlineare Approximationen	370
2.1.2.1	Kettenbruch-Approximation	370
2.1.2.2	Padé-Approximation	371
2.2	Globale Approximation	374
2.2.1	Gauß-Approximation stetiger Funktionen	374
2.2.2	Tschebyscheff-Approximation	378
3	Orthogonaltransformationen	379
3.1	Approximation und Orthogonalität	379
3.2	Orthogonalisierungsverfahren	382
3.2.1	Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren	382
3.3	Fourier-Entwicklung	390
3.3.1	Fourier-Reihen	392
3.3.2	Frejér-Reihen	402
3.3.3	Diskrete Fourier-Entwicklung	404
9	Differenzieren	
1	Symbolisches Differenzieren	416
2	Numerisches Differenzieren	419
2.1	Differenzenquotient/Differentialquotient	419
2.2	Differentiation nach Richardson	425
2.3	Differentiation der Interpolationsfunktion	426
2.4	Mehrpunkte-/höhere Differenzenquotienten	433
10	Integrieren	
1	Numerisches Integrieren	438
2	Integration eines diskret bestimmten Integranden	440
2.1	Nichtäquidistante Stützstellen	440
2.2	Äquidistante Stützstellen	442
3	Integration eines formelmäßig bestimmten Integranden	446
3.1	Gauß-Tschebyscheff-Quadraturformel	446
3.2	Integrationsformeln mit Ableitungen	447
3.3	Simpson-Regel, Cotes-Regel	449
3.4	Integrationsformel für Doppelintervalle	453
3.5	Integration einer periodischen Funktion	455
3.6	Romberg-Quadraturformel	456

11	Differentialgleichung	
1	Beispiele	461
1.1	Mechanische Schwinger	461
1.2	Schwinger mit zwei Freiheitsgraden	469
1.3	Autofederung	472
1.4	Scheinwerfer	473
1.5	Schiefer Wurf	474
1.6	Schiefer Wurf mit Luftwiderstand	475
1.7	R-L-Serienschaltung	476
1.8	Elektrische Netzwerke	478
2	Numerische Lösung von Differentialgleichungen	483
2.1	Numerische Lösung von Differentialgleichungen	
	1. Ordnung	484
2.1.1	Euler-Polygonzugverfahren	485
2.1.2	Verfahren von Picard-Lindelöf	487
2.2	Programmwurf zur Lösung von Dgl. 1. Ordnung	489
2.2.1	Richtungsfeld	489
2.2.2	Euler-Polygonzugverfahren	489
2.3	Integrationsverfahren nach Runge-Kutta	494
2.4	Differentialgleichungen 2. und höherer Ordnung	497
2.4.1	Euler-Verfahren für Dgl. 2. Ordnung	498
2.4.2	Schwingungsdgl. als Beispiel einer Dgl. 2. Ordnung	501
2.4.3	Verfahren von Runge-Kutta für Dgln. 2. Ordnung	505
2.4.4	Runge-Kutta-Verfahren für Dgln. n-ter Ordnung	506
3	Logistisches Wachstum	508
3.1	Logistische Grundformel	508
3.2	Berücksichtigung der Sättigung	508
3.3	Weitere Einschränkungen	510
	Sachregister	515