

# Inhaltsverzeichnis

1.	ELEMENTARE BERECHNUNGEN . . . . .	13
1.1.	Allgemeine Bemerkungen zur Durchführung von Berechnungen . . . . .	13
1.2.	Fehler . . . . .	13
1.2.1.	Definitionen . . . . .	13
1.2.2.	Die Schreibweise von Zahlen . . . . .	14
1.2.3.	Die Addition . . . . .	16
1.2.4.	Die Subtraktion . . . . .	17
1.2.5.	Die Multiplikation und die Division . . . . .	18
1.2.6.	Potenzieren und Radizieren . . . . .	18
1.3.	Die Multiplikation . . . . .	19
1.3.1.	Das arabische Multiplikationsverfahren . . . . .	19
1.3.2.	Multiplikation mit Umstellung eines Faktors . . . . .	23
1.3.3.	Die Neunerprobe . . . . .	29
1.3.4.	Näherungsweise Multiplikation . . . . .	30
1.4.	Die Division . . . . .	32
1.5.	Näherungsweise Berechnungen von Potenzen und Wurzeln . . . . .	37
1.5.1.	Einige Näherungsformeln . . . . .	37
1.5.2.	Näherungsweise Berechnung einiger Potenzen . . . . .	38
1.5.3.	Näherungsweise Berechnung von Quadratwurzeln . . . . .	38
1.5.3.1.	Erstes numerisches Verfahren . . . . .	39
1.5.3.2.	Zweites numerisches Verfahren . . . . .	39
1.5.3.3.	Drittes numerisches Verfahren . . . . .	40
1.5.3.4.	Ein grafisches Verfahren . . . . .	41
1.6.	Berechnungen im Kopf . . . . .	42
1.6.1.	Multiplikation . . . . .	42
1.6.2.	Division . . . . .	43
1.6.3.	Quadratwurzeln . . . . .	43
1.7.	Allgemeine Hinweise . . . . .	44
2.	LÖSUNG VON GLEICHUNGEN . . . . .	46
2.1.	Allgemeine Bemerkungen . . . . .	46
2.2.	Grafische Verfahren . . . . .	46
2.3.	Das Sekantenverfahren . . . . .	47
2.4.	Das NEWTONSche Tangentenverfahren . . . . .	52
2.5.	Das Iterationsverfahren . . . . .	54
2.6.	Das verbesserte Iterationsverfahren . . . . .	59
2.7.	Anwendung der TAYLORSchen Reihe . . . . .	63

3.	LÖSUNG ALGEBRAISCHER GLEICHUNGEN . . . . .	65
3.1.	Abtrennung der reellen Lösungen . . . . .	65
3.2.	Trennung der Lösungen . . . . .	75
3.2.1.	Der Fall ausschließlich reeller Lösungen . . . . .	77
3.2.1.1.	Mehrfache Lösungen . . . . .	80
3.2.1.2.	Verschiedene Lösungen mit gleichen Beträgen . . . . .	81
3.2.2.	Der Fall komplexer Lösungen . . . . .	81
3.3.	Abtrennung der Lösungen mit größtem Betrag . . . . .	86
3.3.1.	Der Fall einer einzigen Lösung mit größtem Betrag . . . . .	86
3.3.2.	Der Fall mehrerer Lösungen mit größtem Betrag . . . . .	91
3.4.	Ein Verfahren zur Korrektur eines abgetrennten Trinoms . . . . .	95
3.5.	Eine Anwendung des Schemas von RUFFINI und HORNER . . . . .	104
3.6.	Lösung von Gleichungen vierten Grades . . . . .	111
3.7.	Allgemeine Hinweise . . . . .	115
3.8.	Größte gemeinsame Teiler . . . . .	116
3.8.1.	Größte gemeinsame Teiler natürlicher Zahlen . . . . .	116
3.8.2.	Größte gemeinsame Teiler von Polynomen . . . . .	119
4.	LÖSUNG VON GLEICHUNGSSYSTEMEN . . . . .	123
4.1.	Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten . . . . .	123
4.1.1.	Einige Sonderfälle . . . . .	123
4.1.1.1.	Elimination . . . . .	123
4.1.1.2.	Ein grafisches Verfahren . . . . .	124
4.1.2.	Grafische Lösung im allgemeinen Falle . . . . .	126
4.1.3.	Lösung unter Benutzung partieller Ableitungen . . . . .	128
4.1.4.	Lösung durch Iteration . . . . .	131
4.1.5.	Das verbesserte Iterationsverfahren . . . . .	132
4.2.	Drei Gleichungen mit drei Unbekannten . . . . .	134
4.2.1.	Grafische Lösung . . . . .	134
4.2.2.	Lösung unter Benutzung partieller Ableitungen . . . . .	138
4.2.3.	Lösung durch Iteration . . . . .	139
4.2.4.	Iterative Bestimmung der Abweichungen . . . . .	140
4.3.	Vier und mehr Gleichungen mit vier und mehr Unbekannten . . . . .	141
4.4.	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	142
5.	INTERPOLATION . . . . .	144
5.1.	Vorbemerkungen . . . . .	144
5.2.	Interpolation bei gleichabständigen Argumentwerten . . . . .	145
5.2.1.	Differenzschema . . . . .	145
5.2.2.	Die Interpolationsformel von GREGORI-NEWTON . . . . .	146
5.2.3.	Rückläufige Interpolation mit Hilfe der GREGORI-NEWTONSchen Interpolationsformel . . . . .	148
5.2.4.	Einige Regeln über die Bildung von Differenzen . . . . .	149
5.2.5.	Differenzen von Potenzen und Polynomen . . . . .	150
5.2.6.	Die Interpolationsformel von GAUSS . . . . .	154
5.2.7.	Die Interpolationsformel von NEWTON-STIRLING . . . . .	155
5.2.8.	Fehlereinfluß bei Verwendung von Differenzen höherer Ordnung . . . . .	157

5.3.	Interpolation bei verschiedenabständigen Argumentwerten . . . . .	157
5.3.1.	Dividierte Differenzen . . . . .	157
5.3.2.	Die Interpolationsformel von NEWTON . . . . .	160
5.3.3.	Die Interpolationsformel von LAGRANGE . . . . .	162
5.4.	Grafische Interpolation . . . . .	164
5.5.	Interpolation nach Augenmaß . . . . .	167
6.	NÄHERUNGSWEISE DIFFERENTIATION . . . . .	170
6.1.	Näherungsweise Differentiation bei gleichabständigen Argumentwerten . . . . .	170
6.1.1.	Anwendung der GREGORI-NEWTONSchen Formel . . . . .	170
6.1.2.	Anwendung der NEWTON-STIRLINGSchen Formel . . . . .	173
6.1.3.	Ein Beispiel . . . . .	174
6.2.	Näherungsweise Differentiation bei verschiedenabständigen Argumentwerten unter Benutzung der NEWTONSchen Interpolationsformel . . . . .	178
7.	NUMERISCHE INTEGRATION . . . . .	183
7.1.	Vorbemerkungen . . . . .	183
7.2.	Mittelwertformeln . . . . .	184
7.2.1.	Beziehungen zwischen Koeffizienten und Stützstellen . . . . .	184
7.2.2.	Die verschiedenen Arten von Mittelwertformeln . . . . .	187
7.2.3.	Verfahren von NEWTON-KOTES . . . . .	187
7.2.3.1.	Trapezregel . . . . .	187
7.2.3.2.	Mehrfache Anwendung der Trapezregel . . . . .	188
7.2.3.3.	Die Trapezregel bei beliebigen Integrationsgrenzen . . . . .	189
7.2.3.4.	Beispiele . . . . .	190
7.2.3.5.	SIMPSON-Regel . . . . .	192
7.2.3.6.	Mehrfache Anwendung der SIMPSON-Regel . . . . .	193
7.2.3.7.	SIMPSON-Regel bei beliebigen Integrationsgrenzen . . . . .	193
7.2.3.8.	Ein Beispiel . . . . .	194
7.2.3.9.	Formeln höherer Ordnung von NEWTON-KOTES . . . . .	195
7.2.4.	Verfahren von MACLAURIN . . . . .	196
7.2.5.	Verfahren von TSCHEBYSCHEFF . . . . .	197
7.2.6.	Verfahren von GAUSS . . . . .	201
7.2.7.	Verwendung äußerer Stützstellen . . . . .	206
7.2.7.1.	Unsymmetrische Lage der Stützstellen, sämtlich auf einer Seite des Integrationsintervalles . . . . .	206
7.2.7.2.	Unsymmetrische Lage der Stützstellen, die beiderseits des Integrationsintervalles liegen . . . . .	209
7.2.7.3.	Symmetrische Lage der Stützstellen . . . . .	210
7.2.7.4.	Ein Beispiel . . . . .	211
7.2.8.	Komplikationen bei der Anwendung der Mittelwertformeln . . . . .	214
7.3.	Verfahren von EULER-MACLAURIN . . . . .	215
7.4.	Verfahren von GREGORI . . . . .	219
8.	EMPIRISCHE FORMELN . . . . .	221
8.1.	Vorbemerkungen . . . . .	221
8.2.	Ein grafisches Verfahren . . . . .	222
8.3.	Abweichungsbegriffe und Näherungsprinzipien . . . . .	223

8.3.1.	Integralabweichung . . . . .	223
8.3.2.	Quadratische Integralabweichung . . . . .	224
8.3.3.	Prinzip gleicher Flächen . . . . .	227
8.3.4.	Bindung von Punkten . . . . .	229
8.3.5.	Ein Beispiel . . . . .	231
8.4.	Übertragung der Näherungsprinzipien auf tabellarisch gegebene Funktionen . . . . .	234
8.4.1.	Vorbemerkungen . . . . .	234
8.4.2.	Prinzip der minimalen Summe der Abweichungsquadrate . . . . .	234
8.4.3.	Prinzip gleicher Summen . . . . .	237
8.5.	Koordinatentransformationen . . . . .	240
	Literaturverzeichnis . . . . .	244
	Sachwortverzeichnis . . . . .	245