

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur ersten Auflage	XVI
Vorwort zur zweiten Auflage	XVIII

I. Allgemeine Grundlagen

A. Was ist Mathematik?	1
B. Die Sprache der Mathematik	3
C. Die verschiedenen Arten des mathematischen Beweises	5
D. Deduktion, Induktion und Intuition in der Mathematik	6

II. Einführung der Zahlen

A. Einige Betrachtungen aus der Mengenlehre	7
1. Begriff der Menge und Operationen mit verschiedenen Mengen	7
2. Relationen und Operationen innerhalb einer Menge	7
B. Natürliche Zahlen	10
1. Definition und Darstellung	10
2. Das Rechnen mit den natürlichen Zahlen	11
3. Zahlentheorie	13
C. Negative Zahlen	14
D. Brüche	15
E. Irrationale Zahlen	17
F. Komplexe Zahlen	18
G. Einige abgeleitete Rechenregeln	21
1. Das Rechnen mit Summen- und Produktzeichen	21
2. Das Rechnen mit Ungleichungen	23

III. Kombinatorik

A. Permutationen	27
B. Variationen	29
C. Kombinationen	31
D. Binomischer Lehrsatz	33

IV. Matrizen, Determinanten, lineare Gleichungen

A. Matrizen	39
B. Determinanten	42
1. Definition	42
2. Verfahren zur Berechnung von Determinanten niedriger Ordnung	43
3. Laplacescher Entwicklungssatz	44
4. Das Rechnen mit Determinanten	45
5. Verfahren zur Berechnung von Determinanten beliebiger Ordnung	47
6. Unterdeterminanten und Rang einer Matrix	48
7. Lineare Abhängigkeit	50
C. Lineare Gleichungen	52
1. Einleitung	52
2. Inhomogene Gleichungssysteme	53

a) System gleich vieler Gleichungen und Unbekannter mit nicht verschwindender Koeffizientendeterminante	53
α) Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten S. 53; β) n Gleichungen mit n Unbekannten S. 55	
b) Allgemeines inhomogenes Gleichungssystem	58
α) Bedingungen für die Lösbarkeit S. 58; β) Verfahren zum Auffinden der Lösungen S. 61	
3. Homogene Gleichungssysteme	62
a) Diskussion der Lösbarkeit	62
b) Sätze über Lösungen. Fundamentales Lösungssystem	64
c) Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems	65
4. Zusammenhang mit Vektorrechnung und analytischer Geometrie	66

V. Gleichungen höheren Grades

A. Gleichungen mit einer Unbekannten	67
1. Übersicht über die Lösungsmethoden	67
2. Allgemeine Betrachtungen über die Existenz und Eigenschaften der Lösungen	68
3. Einige Betrachtungen über Polynome	71
B. Gleichungen mit mehreren Unbekannten	71
C. Algebraische und transzendente Zahlen. Konstruktion von Zahlen auf der Zahlengeraden	72

VI. Unendliche Zahlenfolgen und Reihen

A. Unendliche Zahlenfolgen	75
1. Definition, Bezeichnungen und Beispiele	75
2. Häufungswerte, Grenzwert, Konvergenz und Divergenz	76
3. Konvergenzkriterien	77
4. Das Rechnen mit Grenzwerten	80
B. Unendliche Reihen	82
1. Definition, Bezeichnungen und Beispiele	82
2. Reihenrest und Güte der Konvergenz	84
3. Konvergenzkriterien	85
4. Das Rechnen mit unendlichen Reihen	89
5. Potenzreihen	90
C. Definition von Zahlen durch Reihen	91

VII. Funktionen

A. Erläuterung des Funktionsbegriffes	95
B. Funktionen einer Veränderlichen	96
1. Darstellung	96
2. Interpolation und Extrapolation	97
3. Umkehrung und implizite Darstellung einer Funktion	98

4. Wichtige Begriffe zur Charakterisierung von Funktionen	100
5. Diskussion einiger spezieller Funktionen	102
a) Algebraische Funktionen	102
b) Exponentialfunktionen	104
c) Logarithmusfunktionen	106
d) Kreisfunktionen	108
e) Zyklometrische Funktionen	111
f) Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrungen	112
g) Einige weitere spezielle Funktionen	113
6. Einführung des Begriffs der Stetigkeit	115
a) Allgemeine Definition der Stetigkeit	115
b) Gleichmäßige Stetigkeit	117
c) Grenzwerte, rechts- und linksseitige Stetigkeit	117
7. Zuordnung von Funktionswerten mit Hilfe von Grenzwerten	118
8. Sätze über stetige Funktionen	120
9. Definition von Funktionen durch unendliche Reihen	120
C. Funktionen mehrerer Veränderlicher	122
1. Darstellung	122
2. Einige Betrachtungen über Definitionsbereiche	126
3. Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit	127
4. Quadratische Formen	127

VIII. Vektoralgebra

A. Definition des Skalars und des Vektors	131
B. Algebraische Operationen mit Vektoren	132
1. Summe von Vektoren	132
2. Differenz von Vektoren	134
3. Zerlegung eines Vektors	134
4. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	135
5. Einheitsvektoren und Darstellung eines Vektors durch die Summe der aus den Komponenten gebildeten Vektoren	135
6. Skalares Produkt	136
7. Vektorielltes Produkt	138
8. Mehrfache Produkte	141
C. Lineare Abhängigkeit und Darstellung in verschiedenen Räumen	143
1. Lineare Abhängigkeit von Vektoren	143
2. Darstellung eines Vektors mit Hilfe eines beliebigen Dreibeins	145
a) Allgemeines Dreibein	145
b) Orthonormiertes Dreibein	149
c) Transformationsgleichungen in Matrixform	151
d) Kovariante und kontravariante Komponenten	152
e) Betrag und skalares Produkt im allgemeinen Fall	153
D. Der n-dimensionale Vektorraum	154

IX. Analytische Geometrie

A. Aufgaben der analytischen Geometrie	159
B. Beispiele für die analytische Darstellung von Kurven und Flächen	159
1. Darstellung durch Gleichungen in x , y und z	159
a) Ebenes Koordinatensystem	159
b) Räumliches Koordinatensystem	161
2. Parameterdarstellung	167
C. Abbildungen	170
1. Begriff der Abbildung	170
2. Diskussion einiger spezieller Abbildungen	172
a) Parallelverschiebung	172
b) Affine Abbildung mit festliegendem Koordinatenursprung	173
α) Eigenschaften der Abbildung S. 173; β) Aufeinanderfolge mehrerer Abbildungen S. 175; γ) Umkehrung der Abbildung S. 175; δ) Eigen- werte und Eigenvektoren S. 176	
c) Drehung und Spiegelung als Sonderfall affiner Abbildungen	180
α) Eigenschaften der Abbildungsmatrizen S. 180; β) Aufsuchen der orthogonalen Matrizen zweiter Ordnung S. 182	
d) Nichtlineare Abbildungen	185
3. Systematische Unterteilung der Abbildungen; Erlanger Programm	187
D. Koordinatentransformationen	189
1. Allgemeines	189
2. Diskussion einiger spezieller Transformationen	190
a) Affine Transformationen mit festbleibendem Koordinatenursprung .	190
b) Drehung des Koordinatensystems als Sonderfall der affinen Trans- formation	193
c) Transformation auf krummlinige Koordinaten	195
3. Änderung einer Abbildungsmatrix bei der Koordinatentransformation	198
a) Allgemeine Transformation. Invarianz der Spur	198
b) Diagonalisierung von Matrizen	200
E. Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades. Hauptachsentrans- formation	203

X. Differential- und Integralrechnung von Funktionen einer Veränderlichen

A. Differentiation von Funktionen	209
1. Die erste Ableitung einer Funktion	209
2. Das Rechnen mit Differentialen	211
3. Differentiation einiger spezieller Funktionen	212
4. Einige allgemeine Regeln für das Differenzieren	214
5. Differentiation weiterer spezieller Funktionen	218
6. Numerisches Differenzieren	222
7. Höhere Ableitungen	223
8. Mittelwertsatz der Differentialrechnung	224

9. Anwendungen des Differenzierens	225
a) Geschwindigkeit	225
b) Näherungsweise Berechnung von Funktionsänderungen	227
B. Integration von Funktionen	228
1. Das bestimmte Integral	228
a) Begriff des bestimmten Integrals	228
b) Beispiele zur Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe der Summenformel	231
c) Einige Sätze über bestimmte Integrale	234
d) Integralabschätzung und Mittelwertsatz der Integralrechnung	234
2. Das unbestimmte Integral	237
a) Definition der Stammfunktion	237
b) Definition des unbestimmten Integrals	238
3. Berechnung des bestimmten Integrals mit Hilfe der Stammfunktion ...	239
4. Verfahren zur Integration	241
a) Allgemeines	241
b) Zerlegung des Integrals in eine Summe von Integralen	241
c) Abspaltung eines konstanten Faktors	241
d) Substitution einer neuen Variablen	242
e) Partielle Integration	244
f) Rekursion	245
g) Partialbruchzerlegung	245
h) Definition von Funktionen durch Integrale	248
5. Uneigentliche Integrale	249
6. Anwendungen des Integrierens	252
a) Flächenberechnungen	252
b) Berechnung der Arbeit	253
c) Angenäherte Berechnung von Summen durch Integration	255
7. Stieltjesches Integral und Lebesguesches Integral	256
C. Integration und Differentiation unendlicher Folgen und Reihen von Funktionen	258
D. Taylorsche Reihe	261
1. Aufsuchen der Taylorsche Reihe	261
2. Ableitung einer Formel zur Abschätzung des Restgliedes	263
3. Beispiele für Reihenentwicklungen	264
E. Unbestimmte Ausdrücke; Ordnung von Null- und Unendlichkeitsstellen ...	267
1. Die Ausdrücke $0/0$ und ∞/∞	267
2. Weitere unbestimmte Ausdrücke	270
3. Ordnung von Nullstellen und Unendlichkeitsstellen	271
F. Kurvendiskussion; Maxima und Minima	273
1. Charakteristische Kurvenpunkte	273
2. Bestimmung von Nullstellen	274
3. Bestimmung von Maxima und Minima	275
4. Bestimmung von Wendepunkten und Sattelpunkten	276
5. Durchführung der Kurvendiskussion	277
6. Andere Extremwertaufgaben	279

XI. Differential- und Integralrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher	
A. Differentiation	281
1. Begriff der partiellen Ableitung	281
2. Höhere Ableitungen; Satz von Schwarz	283
3. Allgemeine Betrachtungen über die partiellen Ableitungen sowie über die Existenz einer Tangentialebene	284
4. Das totale Differential	286
5. Differentiation mittelbarer Funktionen	288
6. Differentiation impliziter Funktionen	290
7. Systeme von Funktionen und deren Umkehrung	293
a) Der Begriff der Funktionaldeterminante	293
b) Existenz und Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion	294
8. Schreibweise des partiellen Differentialquotienten in der Thermodynamik	299
B. Einfaches Integral über eine Funktion mehrerer Veränderlicher	299
1. Eigenschaften des Integrals	299
2. Differentiation des Integrals	301
3. Integration des Integrals	303
4. Besonderheiten bei uneigentlichen Integralen	304
5. Anwendung der Ergebnisse zur Berechnung bestimmter Integrale	306
C. Bereichsintegrale	306
1. Definition des zweidimensionalen Bereichsintegrals	306
2. Berechnung des zweidimensionalen Bereichsintegrals	307
3. Integrale über Bereiche von mehr als zwei Dimensionen	311
4. Transformation der Variablen als Hilfe zur Integralberechnung	312
5. Anwendungen	315
a) Berechnung von Volumina	315
b) Berechnung von Oberflächen	319
c) Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$	320
D. Kurvenintegrale	322
1. Definition und Berechnung	322
2. Wegunabhängigkeit des allgemeinen Kurvenintegrals	326
3. Vollständiges und unvollständiges Differential	330
4. Gaußscher Integralsatz und Greensche Integralformeln	331
E. Flächenintegrale	334
F. Mittelwertsatz und Taylorsche Reihe	337
G. Maxima und Minima	338
1. Charakteristische Flächenpunkte	338
2. Bestimmung von Maxima, Minima und Sattelpunkten	340
3. Bestimmung von Maxima und Minima unter Nebenbedingungen	342

XII. Vektoranalysis und Tensorrechnung

A. Vektoranalysis	349
1. Vektorfelder und Skalarfelder	349

2. Der Gradient	350
3. Konservative Vektorfelder	353
4. Die Divergenz und der Satz von Gauß	355
5. Die Rotation und der Satz von Stokes	358
6. Nablaoperator und Laplaceoperator	359
7. Einige Rechenregeln	360
8. Krümmungslinige Koordinaten	360
B. Tensorrechnung	363
1. Einfaches Beispiel für einen Tensor zweiter Stufe	363
2. Allgemeine Definition des Tensors zweiter Stufe	367
3. Tensorellipsoid	367

XIII. Funktionentheorie

A. Aufgaben der Funktionentheorie	371
B. Definition und Darstellung von Funktionen einer komplexen Variablen	371
1. Folgen und Reihen von komplexen Zahlen	371
2. Definition von Funktionen	372
3. Einige Rechenregeln für komplexe Zahlen	376
4. Stetigkeit von Funktionen	378
5. Mehrdeutige Funktionen; Riemannsche Fläche	379
C. Differentiation und Integration von Funktionen komplexer Variabler	381
1. Differentiation; Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	381
2. Singuläre Stellen	384
3. Integration	384
4. Wegunabhängigkeit des Integrals	386
5. Das Residuum	388
6. Cauchysche Integralformel	391
D. Reihenentwicklungen von Funktionen einer komplexen Variablen	393
1. Allgemeines über Reihen und Funktionen	393
2. Taylorsche Reihe	394
3. Laurent-Reihe	396
4. Zur Berechnung des Residuums	398
E. Weitere funktionentheoretische Betrachtungen	399
1. Der Identitätssatz für analytische Funktionen	399
2. Analytische Fortsetzung	400
3. Einteilung der Funktionen	401

XIV. Reihenentwicklung nach orthonormierten Funktionensystemen; Integraltransformationen

A. Fourierreihen und Fourierintegrale	405
1. Fourierreihe einer Funktion von einer Variablen in reeller Schreibweise	405
a) Angabe der Formeln und Beispiele	405
b) Beweis	411

2. Fourierreihe einer Funktion von einer Variablen in komplexer Schreibweise	413
3. Fourierreihe einer Funktion von mehreren Variablen	415
4. Fourierintegral	416
5. Die Deltafunktion	420
B. Darstellung einer Funktion durch eine Reihe aus orthonormierten Funktionen	422
1. Problemstellung; orthonormierte Funktionensysteme	422
2. Reihenentwicklung	424
C. Darstellung einer Funktion durch ein Integral (Integraltransformation)	428
1. Allgemeine Betrachtungen	428
2. Fouriertransformation	429
3. Laplacetransformation	432
D. Operatoren	434
E. Funktionen als Vektoren in unendlich-dimensionalen Räumen	435
1. Deutung einer Funktion $f(x)$ als Vektor	435
2. Transformation einer Funktion in verschiedene Räume. Hilbertraum ..	437
3. Diagonalisierung von Abbildungsmatrizen bzw. Operatoren	442
4. Vereinheitlichung der Schreibweise mit Hilfe von Diracschen bra- und ket-Symbolen	444

XV. Differentialgleichungen

A. Allgemeine Definitionen und Beispiele	449
1. Gewöhnliche Differentialgleichungen	449
2. Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen	452
3. Partielle Differentialgleichungen	452
4. Aufgaben der Theorie der Differentialgleichungen	453
B. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung	454
1. Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen	454
a) Gleichungen, die sich in eindeutiger Weise nach y' auflösen lassen ..	454
b) Gleichungen, die sich nicht eindeutig nach y' auflösen lassen	457
2. Verfahren zur Lösung der linearen Differentialgleichungen	459
a) Allgemeine Betrachtungen	459
b) Lösung der homogenen Gleichung	459
c) Lösung der inhomogenen Gleichung	461
3. Verfahren zur Lösung eines Systems von linearen Differentialgleichungen	463
a) Allgemeine Betrachtungen	463
b) Lösung homogener Systeme	465
α) Untersuchungen über die Lösungsmannigfaltigkeit S. 441; β) Auf-	465
suchen des allgemeinen Integrals S. 443	467
c) Lösung inhomogener Systeme	471
4. Verfahren zur Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen	472
C. Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	474
1. Allgemeines über die Existenz und Mannigfaltigkeit der Lösungen	474

2. Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	476
a) Allgemeines	476
b) Differentialgleichung der ungedämpften freien Schwingungen	476
α) Ansatz einer trigonometrischen Funktion S. 476; β) Ansatz einer reellen Exponentialfunktion S. 480; γ) Ansatz einer komplexen Funktion S. 481	481
c) Differentialgleichung der gedämpften freien Schwingungen	482
d) Differentialgleichung erzwungener Schwingungen	484
3. System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	487
4. Lineare Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten	492
a) Allgemeines über das Lösen von Differentialgleichungen durch Reihen	492
b) Aufsuchen der Lösungen einiger spezieller Differentialgleichungen	493
α) Legendresche Differentialgleichung S. 466; β) Besselsche Differentialgleichung S. 468; γ) Einige weitere Differentialgleichungen S. 497	495
D. Randwert- und Eigenwertprobleme	498
1. Randwertaufgaben	498
2. Eigenwerte und Eigenfunktionen	501
3. Anwendung der Operatorschreibweise	503
E. Partielle Differentialgleichungen	504
1. Allgemeines	504
2. Aufsuchen der Lösung mit Hilfe des Bernoullischen Produktansatzes	506
a) Grundsätzliche Betrachtungen zum Lösungsverfahren	506
b) Eindimensionale Wellengleichung (Gleichung der schwingenden Saite)	507
α) Ableitung der partiellen Differentialgleichung S. 507; β) Aufsuchen einer speziellen Lösung bei vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen S. 508; γ) Allgemeine Betrachtungen über die Lösungen S. 511	514
c) Die Gleichung der schwingenden Membran	518
d) Differentialgleichung der Diffusion und Wärmeleitung	518
α) Ableitung und Diskussion der Gleichung S. 490; β) Diffusion in einem Stab endlicher Länge S. 491; γ) Diffusion in einem unendlich langen Stab S. 493	521
3. Lösung mit Hilfe von Integraltransformationen	523
a) Allgemeines	523
b) Methode der Laplacetransformation	524
c) Methode der Fouriertransformation	527
4. Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion	529
a) Allgemeines	529
b) Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung	531
c) Beispiel einer partiellen Differentialgleichung	534
XVI. Gruppentheorie	
A. Grundlagen	539
1. Definition der Gruppe	539
2. Konjugierte Elemente und Einteilung in Klassen	542

B. Symmetriegruppen	544
1. Symmetrieeoperationen	544
2. Symmetriegruppen	545
C. Darstellungstheorie	548
1. Grundlagen der Darstellung von Gruppen	548
2. Zusammenhang zwischen verschiedenen Darstellungen	549
3. Irreduzible Darstellungen	551
4. Charaktertafeln	553
5. Darstellung im Vektorraum der Normalkoordinaten	554
a) Allgemeine Betrachtungen	554
b) Anwendung auf Normalschwingungen	557
6. Diagonalisierung von Matrizen. Symmetrische Koordinaten	561

XVII. Wahrscheinlichkeitsrechnung

A. Einleitung	567
1. Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung	567
2. Einige Aussagen über zufällige Ereignisse; Ereignisraum	568
3. Zufallsgrößen	569
B. Definition und Berechnung der Wahrscheinlichkeit im Falle diskreter Zufallsgrößen	570
1. Statistische Definition der Wahrscheinlichkeit	570
2. Wahrscheinlichkeit der Summe von Ereignissen	572
3. Diskussion des Falles gleichwahrscheinlicher Elementarereignisse	572
4. Bedingte Wahrscheinlichkeit	574
5. Wahrscheinlichkeit des Produktes von Ereignissen	576
6. Totale Wahrscheinlichkeit	577
7. Formeln von Bayes	578
8. Zur axiomatischen Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung	578
C. Definition und Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte im Falle kontinuierlicher Zufallsgrößen	580
1. Definition der Wahrscheinlichkeitsdichte	580
2. Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe zweier Zufallsgrößen	582
D. Kette von n Versuchen	584
1. Kette von voneinander unabhängigen Versuchen (Bernoulli-Schema) ..	584
a) Ableitung der exakten Gleichungen	584
b) Diskussion der Funktion $P_n(m)$	585
c) Näherungsgesetze für große n	587
α) Formulierung und Diskussion der Grenzwertsätze S. 587; β) Beweis der Grenzwertsätze S. 590; γ) Beispiele und Anwendungen S. 592	
d) Das Galtonsche Brett	594
e) Das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen	594
2. Markowsche Ketten	595
a) Definition der Markowschen Kette	595

b) Übergangsmatrix nach m Versuchen	597
c) Grenzwert der Übergangsmatrix	599
E. Stochastische Prozesse	600
1. Definition und Einteilung der stochastischen Prozesse	600
2. Der Poisson-Prozeß	601
3. Diskrete Markowprozesse	603
4. Kontinuierliche Markowprozesse	603
F. Verteilungsfunktionen und Parameter einer Verteilung	604
1. Definition der Verteilungsfunktion	604
2. Die Parameter einer Verteilungsfunktion	606
a) Eindimensionale Zufallsgröße	606
b) Mehrdimensionale Zufallsgröße	609
G. Aufgaben der Statistik	609

XVIII. Fehler- und Ausgleichsrechnung

A. Zufällige und systematische Fehler	611
B. Mittelwert und Fehler der Einzelmessungen	611
1. Verteilung der Meßwerte und Mittelwert	611
2. Mittlerer Fehler der Einzelmessungen	613
3. Wahrscheinlicher Fehler der Einzelmessung	614
4. Praktische Durchführung der Rechnungen	615
C. Fehlerfortpflanzung	617
1. Fortpflanzung des Fehlers einer Einzelmessung sowie des maximalen Fehlers	617
2. Fortpflanzung des mittleren Fehlers	619
3. Mittlerer Fehler des Mittelwertes	621
D. Ausgleichsrechnung bei zwei voneinander abhängigen Meßgrößen	622
Antworten und Lösungen	625
Weiterführende Literatur	653
Register	655