

# Inhalt

Einleitung . . . . .	10
1. Funktionalanalytische Entwicklungen der Lösungen von Evolutionsgleichungen . . . . .	18
1.1. Analytische Operatoren . . . . .	18
1.2. Funktionenräume . . . . .	24
1.3. Funktionalanalytische Entwicklungen der Lösungen abstrakter Evolutionsgleichungen. . . . .	29
1.4. Das System der Navier-Stokes-Gleichungen. . . . .	38
1.5. Zur Endlichkeit des Konvergenzradius funktional- analytischer Entwicklungen. . . . .	42
1.6. Funktionalanalytische Entwicklungen der Lösungen in einer Umgebung der ebenparallelen Couette-Strömung. . . . .	47
1.7. Funktionalanalytische Entwicklungen allgemeiner parabolischer Gleichungen . . . . .	49
1.8. Ausnahmen von funktionalanalytischer Abhängigkeit . . . . .	51
2. Grundbegriffe der Maßtheorie. . . . .	57
2.1. Grundlegende Definitionen und Sätze . . . . .	57
2.2. Borelsche $\sigma$ -Algebren, meßbare Abbildungen . . . . .	60
2.3. Maße auf Funktionenräumen . . . . .	65
3. Momententheorie für den Fall kleiner Reynoldszahlen . . . . .	70
3.1. Formulierung der Ergebnisse an der Modell- gleichung (1.3.1) . . . . .	70
3.2. Übergang zu einer abstrakten Evolutionsgleichung. . . . .	76
3.3. Momente von Maßen, die auf Funktionenräumen erklärt sind. . . . .	81
3.4. Statistische Lösungen einer Evolutionsgleichung und deren Momente . . . . .	84
3.5. Die unendliche Kette der Momentengleichungen, die Lösbar- keit des Cauchy-Problems für diese Gleichungskette. . . . .	89
3.6. Das Cauchy-Problem für eine lineare Evolutionsgleichung in Tensorprodukten von Hilberträumen. . . . .	92

---

3.7.	Entwicklung der Momente der statistischen Lösung in eine Reihe nach den Momenten des Anfangsmaßes . . . . .	96
3.8.	Das Abschlußproblem für den Fall kleiner Reynoldszahlen . . .	101
3.9.	Tensorprodukte von Sobolevräumen . . . . .	105
3.10.	Überführung der Navier-Stokes-Gleichungen in eine abstrakte Problemstellung, Lösbarkeit der Kette der Momentengleichungen, Reihenentwicklung der Momente . . . . .	108
4.	Raum-zeitliche statistische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen bei beliebigen Reynoldszahlen . . . . .	111
4.1.	Raum-zeitliche statistische Lösungen einer abstrakten Evolutionsgleichung . . . . .	111
4.2.	Überführung der Navier-Stokes-Gleichungen in eine abstrakte Evolutionsgleichung . . . . .	116
4.3.	Galerkin-Näherungen für die statistische Lösung . . . . .	119
4.4.	Schwache Kompaktheit der Galerkin-Näherungen der statistischen Lösung . . . . .	122
4.5.	Grenzübergang . . . . .	125
4.6.	Eindeutigkeitssatz für die statistischen Lösungen . . . . .	132
5.	Hopfsche Gleichung . . . . .	135
5.1.	Hopfsche Gleichung, Lösbarkeit des Cauchy-Problems . . . . .	136
5.2.	Eindeutigkeitssätze für die Lösungen der Hopfschen Gleichung . . . . .	140
5.3.	Mehrzeitige statistische Lösungen . . . . .	152
5.4.	Konstruktion einer raum-zeitlichen statistischen Lösung aus einer Familie kompatibler mehrzeitiger statistischer Lösungen . . . . .	157
5.5.	Eindeutigkeitssatz für die mehrzeitige Hopfsche Gleichung . . .	166
6.	Momententheorie bei beliebigen Reynoldszahlen . . . . .	168
6.1.	Die Momente der raum-zeitlichen statistischen Lösung . . . . .	168
6.2.	Lösbarkeit des Cauchy-Problems für die Kette der Momentengleichungen . . . . .	173
6.3.	Über die näherungsweise Lösung der Kette der Momentengleichungen, Eindeutigkeitssätze . . . . .	181
6.4.	Asymptotische Entwicklung der Momente der statistischen Lösung . . . . .	184

6.5.	Konstruktion einer der Bedingung 4.1 genügenden Familie statistischer Lösungen. . . . .	189
6.6.	Die Kette der Momentengleichungen für die Navier-Stokes-Gleichungen bei beliebiger Dimension. . . . .	195
7.	Homogene raum-zeitliche statistische Lösungen des Systems der Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	202
7.1.	Homogene Maße auf Funktionenräumen. . . . .	202
7.2.	Galerkin-Näherungen der statistischen Lösung. . . . .	211
7.3.	Abschätzung der Zeitableitung . . . . .	217
7.4.	Ein Einbettungssatz . . . . .	227
7.5.	Einige Folgerungen aus dem Einbettungssatz. . . . .	231
7.6.	Schwache Kompaktheit der Galerkin-Näherungen für die statistische Lösung . . . . .	233
7.7.	Die statistische Lösung ist auf den Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen konzentriert . . . . .	234
7.8.	Zur Glattheit der Lösungsfunktion bezüglich $t$ . . . . .	237
7.9.	Energetische Abschätzungen. . . . .	241
7.10.	Der Anfangswert der statistischen Lösung. . . . .	244
7.11.	Definition der raum-zeitlichen translationshomogenen statistischen Lösung. . . . .	248
8.	Individuelle Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen mit unbeschränkter Energie und andere Fragen. . . . .	250
8.1.	Zur Lösbarkeit des Cauchy-Problems für das System der Navier-Stokes-Gleichungen bei Anfangsbedingungen mit unbeschränkter Energie . . . . .	250
8.2.	Lösbarkeit des Cauchy-Problems bei quasiperiodischen Anfangsbedingungen, die Methode der statistischen Einführung von Parametern. . . . .	252
8.3.	Zu einer von A. N. Kolmogorov aufgeworfenen Frage . . . . .	254
8.4.	Das Cauchy-Problem für die Hopfsche Gleichung in der Klasse der translationshomogenen räumlichen statistischen Lösungen. . . . .	259
8.5.	Die Methode der Einführung eines kleinen Parameters zur Konstruktion einer homogenen statistischen Lösung für ein nichtlineares parabolisches Gleichungssystem. . . . .	262

---

9.	Analytische erste Integrale und asymptotisches Verhalten der Fourierkoeffizienten der Lösungen der zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen bei $t \rightarrow \infty$ . . . . .	.266
9.1.	Problemstellung und Hauptsatz über das asymptotische Verhalten der Fourierkoeffizienten bei $t \rightarrow \infty$ . . . . .	.266
9.2.	Analytische erste Integrale . . . . .	.271
9.3.	Eindeutige Lösbarkeit des Cauchy-Problems für die Gleichung der ersten Integrale. . . . .	.274
9.4.	Erste Integrale und Charakteristiken. . . . .	.280
9.5.	Eine Abschätzung für die Fourierkoeffizienten der Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen bei $t \rightarrow \infty$ . . . . .	.286
9.6.	Asymptotik der Fourierkoeffizienten der Lösungen der zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen bei $t \rightarrow \infty$ . . . . .	.294
9.7.	Über die Asymptotik der Fourierkoeffizienten der Momente der statistischen Lösung bei $t \rightarrow \infty$ . . . . .	.300
10.	Einige Probleme, die mit der funktionalanalytischen Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangsbedingungen und rechten Seiten zusammenhängen . . . . .	.302
10.1.	Funktionsräume . . . . .	.302
10.2.	Lösbarkeit nichtlinearer elliptischer Gleichungen in den Räumen $\hat{V}_K$ . . . . .	.306
10.3.	Instationäre nichtlineare parabolische Gleichungen. . . . .	.311
10.4.	Beweis des Satzes über die funktionalanalytische Entwicklung der Lösung in einer Umgebung der Couette-Strömung. . . . .	.314
Anhang 1.	Vollständige und teilweise Integrierbarkeit von quasilinearen Gleichungen erster Ordnung und quasilinearen Gleichungssystemen (A. V. Fursikov) . . . . .	.319
A1.1.	Problemstellung und Formulierung der Ergebnisse . . . . .	.319
A1.2.	Herleitung der Formeln bei einer Gleichung. . . . .	.321
A1.3.	Einige Hilfssätze . . . . .	.324
A1.4.	Erste Integrale und Integrierbarkeitsbedingungen für quasilineare Gleichungssysteme . . . . .	.326
A1.5.	Beispiele integrierbarer Systeme. . . . .	.330

---

Anhang 2. In $x$ homogene Lösungen der stochastischen Navier-Stokes-Gleichungen mit weißem Rauschen (M. I. Višik, A. I. Komeč) . . . . .	.338
A2.1. Der Raum der Funktionen beschränkter Variation vom "Grad $p$ " und ihre Eigenschaften . . . . .	.340
A2.2. Problemstellung und Formulierung der Ergebnisse . . . . .	.346
A2.3. Über Korrelationsfunktionen homogener Maße . . . . .	.356
A2.4. Periodische Approximationen homogener Maße . . . . .	.361
A2.5. Periodische Approximationen in $x$ homogener Wiener-scher Maße . . . . .	.376
A2.6. Periodische endlichdimensionale Approximationen des stochastischen Cauchy-Problems (1), (2) . . . . .	.385
A2.7. Kompaktheit der Familie der periodischen Approximationen . . . . .	.391
A2.8. Grenzübergang . . . . .	.394
A2.9. Stationäre Lösungen der stochastischen Navier-Stokes-Gleichungen; zu einer von A. N. Kolmogorov aufgeworfenen Frage . . . . .	.398
Kommentare . . . . .	.415
Literatur . . . . .	.419
Register . . . . .	.427