

INHALT

I.	Formulierung der Randwertaufgaben in der mathematischen Physik	15
§ 1.	Einige Begriffe und Sätze aus der Mengenlehre, der Theorie der reellen Funktionen und der Theorie der Operatoren	15
1.	Punktmenge im R^n	15
2.	Die Funktionenklassen $C^p(G)$ und $C^p(\bar{G})$	17
3.	Der Raum der stetigen Funktionen $C(T)$	17
4.	Das Lebesgue-Integral	18
5.	Der Funktionenraum $\mathcal{L}_2(G)$	23
6.	Orthonormalsysteme	26
7.	Vollständige Orthonormalsysteme	28
8.	Lineare Operatoren und Funktionale	30
9.	Lineare Gleichungen	32
10.	Hermitesche Operatoren	34
§ 2.	Die Grundgleichungen der mathematischen Physik	35
1.	Die Schwingungsgleichung	36
2.	Die Diffusionsgleichung	39
3.	Die stationäre Gleichung	41
4.	Die Transportgleichung	41
5.	Gleichungen der Hydrodynamik	42
6.	Die Maxwell'schen Gleichungen	43
7.	Die Schrödinger-Gleichung	44
8.	Die Klein-Gordonsche und die Diracsche Gleichung	44
§ 3.	Klassifizierung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung	45
1.	Klassifizierung der Gleichungen in einem Punkt	45
2.	Der Laplace-Operator in Kugel- und Zylinderkoordinaten	47
3.	Charakteristische Flächen (Charakteristiken)	49
4.	Kanonische Form der Gleichungen mit zwei unabhängigen Variablen	50
5.	Ein Beispiel. Die Tricomische Gleichung	55
§ 4.	Formulierung der grundlegenden Randwertaufgaben für Differentialgleichungen zweiter Ordnung	56
1.	Klassifizierung der Randwertaufgaben	56
2.	Die Cauchysche Aufgabe	58
3.	Die Rolle der Charakteristiken bei der Cauchyschen Aufgabe	59

4. Die Randwertaufgabe für Gleichungen vom elliptischen Typ	60
5. Die gemischte Aufgabe	61
6. Die Korrektheit der Aufgabenstellung bei Aufgaben der mathematischen Physik	62
7. Der Satz von SONJA KOWALEWSKAJA	62
8. Ein Beispiel von HADAMARD	64
9. Klassische und verallgemeinerte Lösungen	65

II. Verallgemeinerte Funktionen 66

§ 5. Grundfunktionen und verallgemeinerte Funktionen 66

1. Einführung	66
2. Der Raum \mathcal{D} der Grundfunktionen	68
3. Der Raum \mathcal{D}' der verallgemeinerten Funktionen	71
4. Der Träger einer verallgemeinerten Funktion	72
5. Reguläre verallgemeinerte Funktionen	73
6. Singuläre verallgemeinerte Funktionen	74
7. Die Formeln von SOCHOZKI	75
8. Lineare Substitution der Variablen verallgemeinerter Funktionen	76
9. Multiplikation verallgemeinerter Funktionen	77
10. Aufgaben	78

§ 6. Differentiation verallgemeinerter Funktionen 79

1. Ableitungen einer verallgemeinerten Funktion	79
2. Eigenschaften verallgemeinerter Ableitungen	80
3. Beispiele, $n = 1$	81
4. Aufgaben	85
5. Beispiele, $n \geq 2$	85

§ 7. Direktes Produkt und Faltung verallgemeinerter Funktionen 94

1. Definition des direkten Produktes	94
2. Kommutativität des direkten Produktes	97
3. Weitere Eigenschaften des direkten Produktes	98
4. Faltung verallgemeinerter Funktionen	100
5. Eine Bedingung für die Existenz der Faltung	102
6. Differentiation der Faltung	104
7. Regularisierung verallgemeinerter Funktionen	105
8. Beispiele für Faltungen. Das Newtonsche Potential	108
9. Aufgaben	109

§ 8. Verallgemeinerte Funktionen schwachen Wachstums 109

1. Der Raum \mathcal{S} der Grundfunktionen	109
2. Der Raum \mathcal{S}' der verallgemeinerten Funktionen schwachen Wachstums	110
3. Beispiele verallgemeinerter Funktionen schwachen Wachstums	111
4. Die Struktur verallgemeinerter Funktionen mit einem Punkttträger	113
5. Das direkte Produkt verallgemeinerter Funktionen schwachen Wachstums	114
6. Faltung verallgemeinerter Funktionen schwachen Wachstums	115

§ 9. Fourier-Transformation verallgemeinerter Funktionen schwachen Wachstums 116

1. Fourier-Transformation der Grundfunktionen aus \mathcal{S}	116
2. Fourier-Transformation der verallgemeinerten Funktionen aus \mathcal{S}'	117
3. Eigenschaften der Fourier-Transformation.	119
4. Fourier-Transformation verallgemeinerter Funktionen mit kompaktem Träger	120
5. Fourier-Transformation der Faltung	122
6. Beispiele, $n = 1$	122
7. Aufgaben	126
8. Beispiele, $n \geq 2$	127

III. Die Fundamentallösungen und die Cauchysche Aufgabe. 131

§ 10. Fundamentallösungen linearer Differentialoperatoren 131

1. Verallgemeinerte Lösungen linearer Differentialgleichungen	131
2. Fundamentallösungen	132
3. Gleichungen mit rechter Seite	134
4. Die Methode der Reduktion	135
5. Fundamentallösung eines gewöhnlichen linearen Differentialoperators.	138
6. Die Fundamentallösung des Operators der Wärmeleitung	139
7. Die Fundamentallösung des Wellenoperators	140
8. Die Fundamentallösung des Laplace-Operators	142
9. Die Fundamentallösung des Helmholtz-Operators	143
10. Die Fundamentallösung des Cauchy-Riemannschen Operators	144
11. Die Fundamentallösung des Transportoperators	145
12. Aufgaben	146

§ 11. Retardiertes Potential 147

1. Eigenschaften der Fundamentallösung des Wellenoperators	147
2. Zusätzliches über Faltungen	149
3. Das retardierte Potential	152
4. Retardierte Flächenpotentiale	156

§ 12. Die Cauchysche Aufgabe für die Wellengleichung 159

1. Die Cauchysche Aufgabe für die gewöhnliche lineare Differentialgleichung	159
2. Die verallgemeinerte Cauchysche Aufgabe für die Wellengleichung	161
3. Lösung der verallgemeinerten Cauchyschen Aufgabe	162
4. Lösung der klassischen Cauchyschen Aufgabe	164
5. Aufgaben	165

§ 13. Die Wellenausbreitung 166

1. Wellenausbreitung im Raum	167
2. Wellenausbreitung in der Ebene	168
3. Wellenausbreitung entlang einer Geraden	170
4. Die Methode der ein- und auslaufenden Wellen	172
5. Das Spiegelungsprinzip. Die einseitig unbeschränkte Saite	174
6. Das Spiegelungsprinzip. Die endliche Saite	177

§ 14. Die Cauchysche Aufgabe für die Wärmeleitungsgleichung	179
1. Das Wärmepotential	179
2. Das Wärmepotential auf einer Fläche	180
3. Die verallgemeinerte Cauchysche Aufgabe für die Wärmeleitungsgleichung	181
4. Lösung der Cauchyschen Aufgabe	182
5. Aufgaben	183
V. Integralgleichungen	185
§ 15. Die Methode der sukzessiven Approximation	186
1. Integralgleichungen mit stetigem Kern	186
2. Iterierte Kerne. Die Resolvente	189
3. Volterrasche Integralgleichungen	192
4. Integralgleichungen mit polarem Kern	194
5. Aufgaben	198
§ 16. Die Fredholmschen Sätze	200
1. Integralgleichungen mit ausgeartetem Kern	200
2. Die Fredholmschen Sätze für Integralgleichungen mit ausgeartetem Kern	202
3. Die Fredholmschen Sätze für Integralgleichungen mit stetigem Kern	204
4. Folgerungen aus den Fredholmschen Sätzen	208
5. Die Fredholmschen Sätze für Integralgleichungen mit polarem Kern	210
6. Aufgaben	211
§ 17. Integralgleichungen mit hermiteschen Kernen	212
1. Integraloperatoren mit stetigem hermiteschem Kern	212
2. Das Lemma von ARZELÀ	213
3. Integralgleichungen mit stetigem hermiteschem Kern	214
4. Integralgleichungen mit polarem hermiteschem Kern	216
§ 18. Der Satz von HILBERT-SCHMIDT und Folgerungen daraus	217
1. Der Satz von HILBERT-SCHMIDT für stetige hermitesche Kerne	217
2. Bilineare Zerlegung iterierter Kerne	220
3. Bilineare Zerlegung stetiger hermitescher Kerne	221
4. Die Lösung der inhomogenen Integralgleichung mit stetigem hermiteschem Kern	223
5. Positive Kerne	225
6. Erweiterung der Hilbert-Schmidtschen Theorie auf Integralgleichungen mit polarem hermiteschem Kern	225
7. Der Satz von JENTZSCH	227
8. Das Verfahren von KELLOGG	228
9. Aufgaben	232
V. Randwertprobleme für elliptische Gleichungen	233
§ 19. Das Eigenwertproblem	233
1. Formulierung des Eigenwertproblems	233
2. Die Greenschen Formeln	234
3. Eigenschaften des Operators L	235

4. Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators L	236
5. Die Fouriersche Methode (Separation der Variablen)	240
6. Beispiele	241
7. Die physikalische Bedeutung der Eigenwerte und Eigenfunktionen	245
8. Eindeutigkeit der Lösung inhomogener Randwertaufgaben	245
9. Aufgaben	245
§ 20. Das Sturm-Liouvillesche Problem	246
1. Die Greensche Funktion	246
2. Überführung des Sturm-Liouvilleschen Problems auf eine Integralgleichung	249
3. Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen	250
4. Die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenfunktionen	252
§ 21. Harmonische Funktionen	252
1. Die Greensche Formel	253
2. Verallgemeinerung der Greenschen Formeln	255
3. Der Satz vom arithmetischen Mittel	257
4. Das Maximumprinzip	257
5. Folgerungen aus dem Maximumprinzip	258
6. Reduktion von Singularitäten bei harmonischen Funktionen	259
7. Verallgemeinerte harmonische Funktionen	260
8. Weitere Eigenschaften harmonischer Funktionen	261
9. Ein Analogon zum Satz von LIOUVILLE	262
10. Aufgaben	263
§ 22. Das Newtonsche Potential	264
1. Das Volumenpotential	264
2. Die Potentiale der einfachen und der doppelten Belegung	265
3. Der physikalische Sinn der Newtonschen Potentiale	267
4. Ljapunow-Flächen	268
5. Eigenschaften der Potentiale einer einfachen bzw. doppelten Belegung auf einer Fläche S	271
6. Die Unstetigkeit des Potentials der doppelten Belegung	273
7. Die Unstetigkeit der normalen Ableitung des Potentials der einfachen Belegung	276
8. Aufgaben	277
§ 23. Randwertaufgaben für die Laplace- und die Poisson-Gleichung im Raum	278
1. Die grundlegenden Randwertaufgaben	278
2. Das Verhalten harmonischer Funktionen im Unendlichen	279
3. Eindeutigkeitssätze der Lösung von Randwertproblemen	280
4. Überführung von Randwertaufgaben in Integralgleichungen	282
5. Untersuchung der Integralgleichungen der Potentialtheorie	284
§ 24. Die Greensche Funktion des Dirichletschen Problems	287
1. Definition und Eigenschaften der Greenschen Funktion	287
2. Beispiele für Herleitung Greenscher Funktionen (Spiegelungsprinzip)	290
3. Lösung von Randwertproblemen mit Hilfe der Greenschen Funktion	293

4. Die Poissonsche Formel	294
5. Überführung von Randwertaufgaben in Integralgleichungen	295
6. Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen	297
7. Aufgaben	299
§ 25. Kugelfunktionen	300
1. Definition der Kugelfunktionen	300
2. Die Differentialgleichung der Kugelfunktionen	301
3. Die Legendreschen Polynome	302
4. Die erzeugende Funktion	303
5. Die zugeordneten Legendreschen Funktionen	305
6. Kugelfunktionen	307
7. Die Formel von LAPLACE	308
8. Separation der Variablen in der Laplace-Gleichung	309
9. Lösung des Dirichletschen und des Neumannschen Problems für die Kugel	311
§ 26. Randwertprobleme für die Laplace-Gleichung in der Ebene	312
1. Das Verhalten harmonischer Funktionen im Unendlichen	313
2. Aufgabenstellung und Eindeutigkeit der Lösungen der grundlegenden Randwertprobleme	314
3. Das logarithmische Potential	315
4. Lösbarkeitsbedingungen für die betrachteten Randwertprobleme	318
5. Lösung der Randwertprobleme für den Kreis	321
6. Die Greensche Funktion des Dirichletschen Problems	323
7. Die Lösung des Dirichletschen Problems für ein einfach zusammenhängendes Gebiet	324
8. Aufgaben	325
§ 27. Die Helmholtz-Gleichung	326
1. Die Strahlungsbedingung von SOMMERFELD	327
2. Die homogene Helmholtz-Gleichung	327
3. Potentiale	329
4. Das Prinzip der Grenzabsorption	331
5. Das Prinzip der Grenzamplitude	332
6. Randwertprobleme für die Helmholtz-Gleichung	334
7. Aufgaben	335
VI. Die gemischte Aufgabe	336
§ 28. Separation der Variablen (Die Fouriersche Methode)	336
1. Die homogene hyperbolische Gleichung	336
2. Die inhomogene hyperbolische Gleichung	338
3. Die parabolische Gleichung	340
4. Die Schrödinger-Gleichung	341
5. Die elliptische Gleichung	341
6. Beispiele	342
7. Aufgaben	349

§ 29. Die gemischte Aufgabe für Gleichungen vom hyperbolischen Typ	349
1. Die klassische Lösung. Das Energieintegral	349
2. Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der klassischen Lösung	352
3. Funktionen, die im Sinne des Raumes $\mathcal{L}_2(G)$ stetig sind	355
4. Die verallgemeinerte Lösung	357
5. Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der verallgemeinerten Lösung	360
6. Die Existenz der verallgemeinerten Lösung	361
7. Aufgaben	363
§ 30. Die gemischte Aufgabe für Gleichungen vom parabolischen Typ	364
1. Klassische Lösung. Das Maximumprinzip	364
2. Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der klassischen Lösung	366
3. Die verallgemeinerte Lösung	367
4. Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der verallgemeinerten Lösung von den Daten	368
5. Die Existenz der verallgemeinerten Lösung	368
Literatur	370
Namen- und Sachverzeichnis	373