

INHALTSVERZEICHNIS

Kap. I. Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen

§ 1. Klassifikation der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung	15
1. Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen	15
2. Klassifikation der Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit mehreren unabhängigen Veränderlichen	21
3. Die kanonischen Formen linearer Gleichungen mit konstanten Koeffi- zienten	24
Aufgaben zu Kapitel I	25

Kap. II. Hyperbolische Differentialgleichungen

§ 1. Einfache Aufgaben, die auf hyperbolische Differentialgleichungen führen. Randwertaufgaben	27
1. Die Differentialgleichung kleiner Transversalschwingungen einer Saite . .	27
2. Die Differentialgleichung longitudinal schwingender Stäbe und Saiten . .	30
3. Die Schwingungsenergie einer Saite	32
4. Herleitung der Gleichung elektrischer Schwingungen in Leitern	34
5. Transversalschwingungen einer Membran	35
6. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik und der Akustik	37
7. Rand- und Anfangsbedingungen	41
8. Reduktion der allgemeinen Aufgabe	46
9. Formulierung der Randwertaufgaben bei mehreren Veränderlichen . . .	47
10. Eindeutigkeitssatz	48
Aufgaben	50
§ 2. Die Wellenausbreitungsmethode	52
1. Die D'ALEMBERTSche Methode	52
2. Physikalische Interpretation	54
3. Stabilität der Lösung	59
4. Halbgerade und Fortsetzungsmethode	61
5. Aufgaben für beschränkte Intervalle	67
6. Wellendispersion	70
7. Die Schwingungsintegralgleichung	73
8. Verteilung der Unstetigkeitsstellen längs der Charakteristiken	77
Aufgaben	78
§ 3. Trennung der Veränderlichen	81
1. Freie Schwingungen einer Saite	81
2. Interpretation der Lösung	86

3. Darstellung beliebiger Schwingungen durch Superposition stehender Wellen	89
4. Inhomogene Gleichungen	94
5. Allgemeine erste Randwertaufgabe	100
6. Randwertaufgaben mit stationären Inhomogenitäten	100
7. Aufgaben ohne Anfangsbedingungen	103
8. Wirkung einer konzentrierten Kraft	106
9. Allgemeines Schema zur Methode der Trennung der Veränderlichen	109
Aufgaben	115
§ 4. Aufgaben mit Zusatzbedingungen auf den Charakteristiken	117
1. Aufgabenstellung	117
2. Die Methode der sukzessiven Approximation	119
Aufgaben	123
§ 5. Lösung allgemeiner linearer hyperbolischer Differentialgleichungen	123
1. Adjungierte Differentialoperatoren	123
2. Integralform der Lösung	124
3. Physikalische Interpretation der RIEMANNschen Funktion	127
4. Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	129
Aufgaben zu Kapitel II	133
Anwendungen zu Kapitel II	134
I. Über die Schwingungen der Saiten von Musikinstrumenten	134
II. Schwingungen von Stäben	136
III. Schwingungen einer mit Masse belegten Saite	140
1. Aufgabenstellung	140
2. Eigenschwingungen einer mit Masse belegten Saite	141
3. Die Schwingungen einer Saite mit einem belasteten Ende	145
4. Korrekturen an den Eigenwerten	146
IV. Die Gleichungen der Gasdynamik und die Theorie der Stoßwellen	146
1. Die Gleichungen der Gasdynamik. Der Energieerhaltungssatz	146
2. Stoßwellen. Die HUGONOTSchen Bedingungen	148
3. Schwache Unstetigkeiten	153
V. Dynamik der Gasabsorption	157
1. Gleichungen der Gasabsorption	157
2. Asymptotische Lösung	161
VI. Physikalische Analogien	167
Kap. III. Parabolische Differentialgleichungen	
§ 1. Einfache Aufgaben, die auf parabolische Differentialgleichungen führen.	
Randwertaufgaben	171
1. Die lineare Aufgabe der Wärmeausbreitung	171
2. Die Diffusionsgleichung	174
3. Räumliche Wärmeausbreitung	176
4. Formulierung der Randwertaufgaben	178
5. Das Prinzip vom Maximum	183

6. Der Eindeutigkeitsatz	185
7. Der Eindeutigkeitsatz für die unendliche Gerade	188
§ 2. Die Methode der Trennung der Veränderlichen	189
1. Die homogene Randwertaufgabe	189
2. Die GREENSche Funktion	193
3. Randwertaufgaben mit unstetigen Anfangsbedingungen	194
4. Die inhomogene Wärmeleitungsgleichung	201
5. Die allgemeine erste Randwertaufgabe	204
Aufgaben	206
§ 3. Aufgaben für die unendliche Gerade	207
1. Die GREENSche Funktion für die unbeschränkte Gerade	207
2. Wärmeleitung auf der unendlichen Geraden	214
3. Randwertaufgaben für die Halbgerade	223
§ 4. Aufgaben ohne Anfangsbedingungen	231
Aufgaben zu Kapitel III	234
Anwendungen zu Kapitel III	236
I. Temperaturwellen	236
II. Der Einfluß des radioaktiven Zerfalls auf die Temperatur der Erdrinde	240
III. Die Analogiemethode in der Theorie der Wärmeleitung	244
1. Die GREENSche Funktion für die unendliche Gerade	244
2. Randwertaufgaben für die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung	247
IV. Das Erstarrungsproblem	248
V. Die EINSTEIN-KOLMOGOROFFSche Gleichung	252
VI. Die δ -Funktion	255
1. Definition der δ -Funktion	255
2. Entwicklung der δ -Funktion in eine FOURIERSche Reihe	258
3. Anwendung der δ -Funktion auf die Konstruktion der GREENSchen Funktion	260

Kap. IV. Elliptische Differentialgleichungen

§ 1. Aufgaben, die auf die LAPLACESche Differentialgleichung führen	264
1. Stationäre Wärmefelder. Formulierung der Randwertaufgaben	264
2. Wirbelfreie Flüssigkeitsbewegungen (Potentialströmungen). Das Geschwindigkeitspotential einer stationären Strömung und das Potential eines elektrostatischen Feldes	265
3. Orthogonale Transformation des LAPLACESchen Differentialausdrucks auf krummlinige Koordinaten	267
4. Einige Partikularlösungen der LAPLACESchen Differentialgleichung	270
5. Harmonische Funktionen und analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen	271
6. Transformation durch reziproke Radien	273
§ 2. Allgemeine Eigenschaften der harmonischen Funktionen	275
1. Die GREENSchen Integralformeln. Integraldarstellung der Lösungen	275
2. Einige fundamentale Eigenschaften harmonischer Funktionen	279

3. Eindeutigkeit und Stabilität der Lösungen der ersten Randwertaufgabe	282
4. Aufgaben mit unstetigen Randbedingungen	284
5. Isolierte Singularitäten	285
6. Regularität einer harmonischen Funktion im Unendlichen	287
7. Äußere Randwertaufgaben. Eindeutigkeit der Lösung für zwei- und drei- dimensionale Aufgaben	288
8. Zweite Randwertaufgabe. Regularität im Unendlichen. Eindeutigkeitsatz	291
§ 3. Lösung der Randwertaufgaben für die einfachsten Gebiete durch Trennung der Veränderlichen	293
1. Erste Randwertaufgabe für den Kreis	294
2. Das POISSONSche Integral	298
3. Der Fall unstetiger Randwerte	301
§ 4. Die GREENSche Funktion (Quellenfunktion)	302
1. Die GREENSche Funktion für die Gleichung $\Delta u = 0$ und ihre grundlegen- den Eigenschaften	303
2. Die Methode der elektrostatischen Bildpunkte (des elektrischen Bildes) und die GREENSche Funktion für die Kugel	307
3. Die GREENSche Funktion für den Kreis	310
4. Die GREENSche Funktion für den Halbraum	311
§ 5. Potentialtheorie	312
1. Räumliches Potential (NEWTONSches Potential)	312
2. Ebenes Problem (Logarithmisches Potential)	314
3. Uneigentliche Integrale	316
4. Die ersten Ableitungen eines räumlichen Potentials	323
5. Die zweiten Ableitungen eines räumlichen Potentials	325
6. Flächenpotentiale	328
7. LJAPUNOFFSche Flächen und Kurven	332
8. Unstetigkeiten des Potentials der Doppelbelegung	335
9. Eigenschaften des Potentials der einfachen Belegung	338
10. Anwendung der Flächenpotentiale auf die Lösung von Randwertaufgaben	341
11. Randwertprobleme und die ihnen äquivalenten Integralgleichungen	345
§ 6. Die Differenzenmethode	350
1. Die Differenzenmethode für die LAPLACESche Differentialgleichung	350
2. Die Methode der sukzessiven Approximation zur Lösung von Differenzen- gleichungen	352
3. Elektrointegratoren	355
Aufgaben zu Kapitel IV	356
Anwendungen zu Kapitel IV	358
I. Asymptotische Darstellung des räumlichen Potentials	358
II. Aufgaben der Elektrostatik	361
III. Das Grundproblem der Elektroerkundung	367
IV. Bestimmung von Vektorfeldern	373
V. Die konforme Abbildung in der Elektrostatik	376
VI. Die konforme Abbildung in der Hydrodynamik	379

VII. Die biharmonische Gleichung	385
1. Eindeutigkeit der Lösung	386
2. Darstellung einer biharmonischen Funktion durch harmonische Funktionen	387
3. Lösung der biharmonischen Gleichung für den Kreis	388
Kap. V. Räumliche Wellenausbreitung	
§ 1. Anfangswertprobleme. Mittelwertmethode	390
1. Die Mittelwertmethode	390
2. Die Absteigemethode	392
3. Physikalische Interpretation	394
4. Die Spiegelungsmethode	396
§ 2. Die KIRCHHOFFSche Formel	397
1. Herleitung der KIRCHHOFFSchen Formel	397
2. Folgerungen aus der KIRCHHOFFSchen Wellenformel	400
§ 3. Schwingungen beschränkter Raumbereiche	403
1. Allgemeines Schema für die Methode der Trennung der Veränderlichen. Stehende Wellen	403
2. Schwingungen einer rechteckigen Membran	409
3. Schwingungen einer kreisförmigen Membran	412
Aufgaben zu Kapitel V	418
Anwendungen zu Kapitel V	419
I. Zurückführung von Gleichungen der Elastizitätstheorie auf Wellengleichungen	419
II. Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes	421
1. Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes und Randbedingungen	421
2. Potentiale eines elektromagnetischen Feldes	425
3. Das elektromagnetische Feld eines Oszillators	427
Kap. VI. Räumliche Wärmeausbreitung	
§ 1. Wärmeausbreitung im unbegrenzten Raum	434
1. Die GREENSche Funktion	434
2. Wärmeausbreitung im unbegrenzten Raum	438
§ 2. Wärmeausbreitung in beschränkten Gebieten	442
1. Schema der Methode der Trennung der Veränderlichen	442
2. Abkühlung eines Kreiszyinders	445
3. Bestimmung der kritischen Dimensionen	447
§ 3. Randwertaufgaben für Gebiete mit veränderlichen Berandungen	449
1. Die GREENSche Formel für die Wärmeleitungsgleichung und die GREENSche Funktion	449
2. Lösung der Randwertaufgabe	453
3. Die GREENSche Funktion für ein Intervall	455

§ 4. Wärmepotentiale	457
1. Eigenschaften der Wärmepotentiale der einfachen und der Doppelbelegung	457
2. Die Lösung von Randwertaufgaben	459
Aufgaben zu Kapitel VI	461
Anwendungen zu Kapitel VI	462
I. Diffusion einer Wolke	462
II. Über die Entmagnetisierung eines Zylinders	465
III. Die Differenzenmethode für die Wärmeleitungsgleichung	469
Kap. VII. Elliptische Differentialgleichungen (Fortsetzung)	
§ 1. Einige fundamentale Aufgaben, die auf die Differentialgleichung $\Delta v + cv = 0$ führen	478
1. Erzwungene Schwingungen	478
2. Diffusion eines Gases bei Zerfallserscheinungen und bei Kettenreaktionen	479
3. Diffusion in einem sich bewegenden Medium	479
4. Formulierung der inneren Randwertaufgaben für die Gleichung $\Delta v + cv = 0$	480
§ 2. GREENSche Funktionen	481
1. Die GREENSche Funktion	481
2. Integraldarstellung der Lösung	483
3. Potentiale	487
§ 3. Aufgaben für ein beschränktes Gebiet. Ausstrahlungsprinzip	489
1. Die Gleichung $\Delta v + cv = -f$ im unbegrenzten Raum	489
2. Das Prinzip der Grenzabsorption	490
3. Das Prinzip der Grenzamplitude	492
4. Die Ausstrahlungsbedingungen	493
§ 4. Aufgaben der mathematischen Theorie der Beugung	498
1. Problemstellung	498
2. Eindeutigkeit der Lösungen	499
3. Beugung auf einer Kugel	502
Aufgaben zu Kapitel VII	509
Anwendungen zu Kapitel VII	510
I. Wellen in Hohlleitern	510
II. Elektromagnetische Schwingungen in Hohlraumresonatoren	521
1. Die Eigenschwingungen eines zylindrischen Endovibrators	521
2. Die elektromagnetische Energie der Eigenschwingungen	525
3. Erzeugung von Schwingungen in einem Endovibrator	527
III. Skineffekt	529
IV. Die Ausbreitung von Radiowellen auf der Erdoberfläche	539

Anhang. Spezielle Funktionen

Einleitung	539
1. Die Differentialgleichungen der speziellen Funktionen	539
2. Formulierung der Randwertaufgaben im Fall $k(a) = 0$	540
Teil I. Zylinderfunktionen	
§ 1. Die Zylinderfunktionen	547
1. Potenzreihen	548
2. Rekursionsformeln	553
3. Die BESSELSche Funktion erster Art von der Ordnung $n + \frac{1}{2}$	554
4. Asymptotische Darstellung der Zylinderfunktionen für große x	555
§ 2. Randwertaufgaben für die BESSELSche Differentialgleichung	557
§ 3. Die verschiedenen Typen von Zylinderfunktionen	561
1. Die HANKELschen Funktionen	561
2. Die HANKELschen und NEUMANNschen Funktionen	562
3. BESSELSche Funktionen mit imaginärem Argument	564
4. Die Funktion $K_0(x)$	566
§ 4. Integraldarstellungen und asymptotische Darstellungen der BESSELSchen Funktionen	570
1. Integraldarstellungen für die BESSELSchen Funktionen von ganzzahliger Ordnung	570
2. Asymptotische Darstellungen der BESSELSchen Funktionen erster Art ..	573
§ 5. Das FOURIER-BESSELSche Integral und einige Integrale, die BESSELSche Funktionen enthalten	577
1. Das FOURIER-BESSELSche Integral	577
2. Einige Integrale, deren Integranden BESSELSche Funktionen enthalten ..	578
§ 6. Darstellung der Zylinderfunktionen durch Kurvenintegrale	581
1. Darstellung der Zylinderfunktionen durch Kurvenintegrale	581
2. Die Sattelpunktmethode. Asymptotische Darstellungen	586
Teil II. Kugelfunktionen	
§ 1. LEGENDRESche Polynome	589
1. Die erzeugende Funktion und die LEGENDRESchen Polynome	589
2. Eine Rekursionsformel	591
3. Die LEGENDRESche Differentialgleichung	591
4. Die Orthogonalität der LEGENDRESchen Polynome	592
5. Die Norm der LEGENDRESchen Polynome	594
6. Eine Differentialbeziehung für die LEGENDRESchen Polynome	595
7. Eine Integralformel. Die Beschränktheit der LEGENDRESchen Polynome	597
8. Die zugeordneten LEGENDRESchen Polynome	599
9. Die Abgeschlossenheit des Systems der zugeordneten LEGENDRESchen Polynome	601

§ 2. Harmonische Polynome und Kugelfunktionen	603
1. Die harmonischen Polynome	603
2. Die Kugelfunktionen	604
3. Die Orthogonalität des Systems der Kugelfunktionen	607
4. Die Vollständigkeit des Systems der Kugelfunktionen	610
5. Die Entwicklung nach Kugelfunktionen.....	611
§ 3. Einige Beispiele für die Anwendung der Kugelfunktionen	614
1. Die Polarisation einer Kugel in einem homogenen Feld	614
2. Die Eigenschwingungen einer Kugel	616
3. Die äußere Randwertaufgabe für die Kugel.....	619
Teil III. Die TSCHEBYSCHEFF-HERMITESchen und die TSCHEBYSCHEFF- LAGUERRESchen Polynome	
§ 1. Die TSCHEBYSCHEFF-HERMITESchen Polynome	621
§ 2. Die TSCHEBYSCHEFF-LAGUERRESchen Polynome	624
§ 3. Einfachste Aufgaben für die SCHRÖDINGER-Gleichung	631
1. Die SCHRÖDINGER-Gleichung	631
2. Der harmonische Oszillator	632
3. Das Eigenwertproblem des Rotators	634
4. Bewegung eines Elektrons in einem COULOMBSchen Feld	635
Tafeln des Fehlerintegrals und einiger Zylinderfunktionen	639
Literaturhinweise der Herausgeber.....	648
Autoren der im Text zitierten Originalarbeiten und Lehrbücher.....	654
Namen- und Sachregister	655