

INHALTSVERZEICHNIS

Einführung.....	1
<i>Teil I. Mittelfunktionen und verallgemeinerte Ableitungen</i>	7
Kapitel 1. Mittelfunktionen	7
§ 1. Der Mittelungskern	7
§ 2. Mittelfunktionen	9
§ 3. Konvergenz der Mittelfunktionen	10
Übungsaufgaben	13
Kapitel 2. Verallgemeinerte Ableitungen	15
§ 1. Der Begriff der verallgemeinerten Ableitung	15
§ 2. Die einfachsten Eigenschaften der verallgemeinerten Ableitung	19
§ 3. Grenzwerteigenschaften der verallgemeinerten Ableitungen	21
§ 4. Der Fall einer unabhängigen Veränderlichen	23
§ 5. Die SOBOLEWSCHEN RÄUME und Einbettungssätze	25
Übungsaufgaben	26
<i>Teil II. Elemente der Variationsrechnung</i>	27
Kapitel 3. Grundbegriffe	27
§ 1. Beispiele zur Ermittlung des Extremums eines Funktionals	27
§ 2. Die Aufgabenstellung der Variationsrechnung	28
§ 3. Die Variation und der Gradient eines Funktionals	31
§ 4. Die EULERSCHE GLEICHUNG	39
§ 5. Die zweite Variation. Eine hinreichende Bedingung für das Extremum	43
§ 6. Das isoperimetrische Problem	44
§ 7. Die Minimalfolge	49
Übungsaufgaben	49
Kapitel 4. Funktionale, die von reellen Funktionen reeller Veränderlicher abhängen	51
§ 1. Das einfachste Variationsproblem	51
§ 2. Untersuchung der zweiten Variation	53
§ 3. Der Fall mehrerer unabhängiger Veränderlicher	55
§ 4. Funktionale, die von Ableitungen höherer Ordnungen abhängen	59
§ 5. Funktionale, die von mehreren Funktionen abhängen	61
§ 6. Natürliche Randbedingungen	63

Kapitel 5. Das Minimum des quadratischen Funktionals	70
§ 1. Der Begriff des quadratischen Funktionals	70
§ 2. Positiv-definite Operatoren	71
§ 3. Der energetische Raum	76
§ 4. Das Minimumproblem des quadratischen Funktionals	84
§ 5. Die verallgemeinerte Lösung	86
§ 6. Über die Separabilität des energetischen Raumes	89
§ 7. Die Erweiterung eines positiv-definiten Operators	91
§ 8. Das einfachste Randwertproblem für die gewöhnliche lineare Differentialgleichung	95
§ 9. Ein allgemeineres Minimumproblem für das quadratische Funktional	100
§ 10. Der Fall eines nur positiven Operators	102
Übungsaufgaben	103
Kapitel 6. Das Eigenspektrum eines positiv-definiten Operators	104
§ 1. Der Begriff des Eigenspektrums eines Operators	104
§ 2. Eigenwerte und Eigenelemente eines symmetrischen Operators	106
§ 3. Das verallgemeinerte Eigenspektrum eines positiv-definiten Operators	107
§ 4. Die Variationsfassung des Eigenwertproblems	109
§ 5. Der Satz über den kleinsten Eigenwert	111
§ 6. Ein Satz über das diskrete Spektrum	113
§ 7. Das STURM-LIOUVILLESche Problem	117
§ 8. Einige Elementarfälle	121
§ 9. Das Mini-Max-Prinzip	122
§ 10. Über das Wachstum der Eigenwerte beim STURM-LIOUVILLESchen Problem	125
Übungsaufgabe	126
<i>Teil III. Elemente der Theorie der Integralgleichungen</i>	<i>127</i>
Kapitel 7. Vollstetige Operatoren	127
§ 1. Notwendige Kenntnisse aus der Funktionalanalysis	127
§ 2. Der FREDHOLMSche Operator	129
§ 3. Der Integraloperator mit schwacher Singularität	131
§ 4. Operatoren mit schwacher Singularität im Raum der stetigen Funktionen	135
Übungsaufgaben	137
Kapitel 8. Die FREDHOLMSche Theorie	138
§ 1. Gleichungen mit vollstetigen Operatoren. Integralgleichungen	138
§ 2. Überführung in eine endlichdimensionale Gleichung. Beweis des ersten und zweiten FREDHOLMSchen Satzes	140
§ 3. Beweis des dritten FREDHOLMSchen Satzes	143
§ 4. Beweis des vierten FREDHOLMSchen Satzes	144
§ 5. Die FREDHOLMSche Alternative	147
§ 6. Über die Stetigkeit der Lösungen einer Gleichung mit schwacher Singularität	148
<i>Teil IV. Allgemeines über partielle Differentialgleichungen</i>	<i>151</i>
Kapitel 9. Differentialgleichungen und Randwertaufgaben	151
§ 1. Der Differentialausdruck und die Differentialgleichung	151
§ 2. Die Klassifizierung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung	153
§ 3. Randbedingungen und Randwertaufgaben	156
§ 4. Das CAUCHYSche Problem	159
§ 5. Existenz-, Eindeutigkeits- und Korrektheitsprobleme bei Randwertaufgaben	160

Kapitel 10. Charakteristiken. Die kanonische Form. Die GREENSchen Formeln . . .	165
§ 1. Transformation der unabhängigen Veränderlichen	165
§ 2. Charakteristiken. Die Beziehung zwischen den CAUCHYSchen Anfangswerten auf der Charakteristik	167
§ 3. Transformation der Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die kanonische Form	169
§ 4. Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher	170
§ 5. Formal adjungierte Differentialausdrücke	173
§ 6. Die GREENSchen Formeln	174
<i>Teil V. Gleichungen vom elliptischen Typ</i>	179
Kapitel 11. LAPLACE-Gleichung und harmonische Funktionen	179
§ 1. Grundbegriffe	179
§ 2. Die singuläre Lösung der LAPLACE-Gleichung	181
§ 3. Die Integraldarstellung für die Funktionen der Klasse $C^{(2)}$	182
§ 4. Die Integraldarstellung einer harmonischen Funktion	185
§ 5. Der Potentialbegriff	186
§ 6. Die Eigenschaften des Volumenpotentials	188
§ 7. Der Mittelwertsatz	196
§ 8. Das Maximumprinzip	199
§ 9. Über die Konvergenz von Folgen harmonischer Funktionen	201
§ 10. Übertragung auf Gleichungen mit variablen Koeffizienten	204
Kapitel 12. Das DIRICHLETSche und das NEUMANNsche Problem	210
§ 1. Aufgabenstellung	210
§ 2. Unitätssätze für die LAPLACE-Gleichung	211
§ 3. Die Lösung des DIRICHLETSchen Problems für die Kugel	215
§ 4. Der Satz von LIOUVILLE	220
§ 5. Das DIRICHLETSche Problem für das Außengebiet der Kugel	221
§ 6. Das Verhalten der Ableitungen einer harmonischen Funktion im Unendlichen	223
§ 7. Der Unitätssatz für das äußere NEUMANNsche Problem	223
Kapitel 13. Elementare Lösungen der DIRICHLETSchen und NEUMANNschen Probleme	226
§ 1. Die DIRICHLETSchen und NEUMANNschen Probleme für den Kreis	226
§ 2. Das DIRICHLETSche Problem für das Kreisringgebiet	230
§ 3. Anwendung der konformen Abbildungen	231
§ 4. Die Kugelfunktionen und ihre Eigenschaften	234
§ 5. DIRICHLETSche und NEUMANNsche Probleme, die sich mit Hilfe von Kugelfunktionen lösen lassen	237
Übungsaufgaben	240
Kapitel 14. Die Variationsmethode beim DIRICHLETSchen Problem. Weitere positiv-definite Probleme	241
§ 1. Die FRIEDRICHSSche Ungleichung	241
§ 2. Der Operator des DIRICHLETSchen Problems	243
§ 3. Der energetische Raum des DIRICHLETSchen Problems	246
§ 4. Die verallgemeinerte Lösung des DIRICHLETSchen Problems	249
§ 5. Das DIRICHLETSche Problem für die homogene Gleichung	251
§ 6. Über die Existenz der zweiten Ableitungen der Lösung des DIRICHLETSchen Problems	253
§ 7. Elliptische Differentialgleichungen höherer Ordnung und Gleichungssysteme	255

§ 8. Das DIRICHLETSche Problem für das unendliche Gebiet	258
Übungsaufgaben	260
Kapitel 15. Das Spektrum des DIRICHLETSchen Problems	262
§ 1. Integraldarstellung einer Funktion, die auf dem Rande eines endlichen Gebietes verschwindet	262
§ 2. Das Spektrum des DIRICHLETSchen Problems für das endliche Gebiet	263
§ 3. Einige Elementarfälle	265
§ 4. Die Wachstumsordnung der Eigenwerte	268
Kapitel 16. Das NEUMANNsche Problem	272
§ 1. Der Fall des positiven Koeffizienten $C(x)$	272
§ 2. Der Fall $C(x) \equiv 0$	273
§ 3. Die Integraldarstellung von S. L. SOBOLEW	275
§ 4. Untersuchung des Operators \mathfrak{R}_0	277
§ 5. Die verallgemeinerte Lösung des NEUMANNschen Problems	281
Übungsaufgabe	282
Kapitel 17. Nicht selbstadjungierte elliptische Gleichungen	284
§ 1. Die verallgemeinerte Lösung	284
§ 2. Die FREDHOLMSchen Sätze	286
Übungsaufgaben	288
Kapitel 18. Die potentialtheoretische Methode bei der homogenen LAPLACE-Gleichung	289
§ 1. LJAPUNOW-Flächen	289
§ 2. Der Raumwinkel	294
§ 3. Das Potential der Doppelschicht	299
§ 4. Das GAUSSsche Integral	300
§ 5. Die Grenzwerte des Potentials der Doppelschicht	303
§ 6. Die Stetigkeit des Potentials der einfachen Schicht	306
§ 7. Die Normalableitung des Potentials der einfachen Schicht	308
§ 8. Zurückführung der DIRICHLETSchen und NEUMANNschen Probleme auf Integralgleichungen	312
§ 9. Die DIRICHLETSchen und NEUMANNschen Probleme im Halbraum	314
§ 10. Untersuchung des ersten Paares adjungierter Gleichungen	316
§ 11. Untersuchung des zweiten Paares adjungierter Gleichungen	317
§ 12. Die Lösung des DIRICHLETSchen Problems für das Außengebiet	320
§ 13. Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher	322
§ 14. Die Gleichungen der Potentialtheorie für den Kreis	327
Kapitel 19. Das Problem der Richtungsableitung	330
§ 1. Aufgabenstellung	330
§ 2. Der HILBERTSche Operator	331
§ 3. Gleichungen mit dem HILBERTSchen Operator	336
§ 4. Die Anzahl der Lösungen und der Index des Problems der Richtungsableitung in der zweidimensionalen Ebene	342
<i>Teil VI. Nicht stationäre Gleichungen</i>	<i>345</i>
Kapitel 20. Die Wärmeleitungsgleichung	345
§ 1. Die Wärmeleitungsgleichung und ihre Charakteristiken	345
§ 2. Das Maximumprinzip	347

§ 3. Das CAUCHYSche Problem und die gemischte Aufgabe	349
§ 4. Eindeutigkeitsätze	351
§ 5. Abstrakte Funktionen einer reellen Veränderlichen	353
§ 6. Die verallgemeinerte Lösung der gemischten Aufgabe	354
Kapitel 21. Die Wellengleichung	357
§ 1. Der Begriff der Wellengleichung	357
§ 2. Die gemischte Aufgabe und ihre verallgemeinerte Lösung	358
§ 3. Die Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten. Das CAUCHYSche Problem. Der charakteristische Kegel	361
§ 4. Der Eindeutigkeitsatz für das CAUCHYSche Problem. Das Abhängigkeitsgebiet	362
§ 5. Die Erscheinung der Wellenausbreitung	364
§ 6. Die verallgemeinerte Lösung des CAUCHYSchen Problems	366
Kapitel 22. Die FOURIERSche Methode	369
§ 1. Die FOURIERSche Methode für die Wärmeleitungsgleichung	369
§ 2. Die Begründung der Methode	371
§ 3. Über die Existenz der klassischen Lösung. Ein Spezialfall	374
§ 4. Die FOURIERSche Methode für die Wellengleichung	376
§ 5. Die Begründung der Methode für die homogene Gleichung	378
§ 6. Die Begründung der Methode für homogene Anfangsbedingungen	381
§ 7. Die Saitenschwingungsgleichung. Bedingungen für die Existenz der klassischen Lösung	383
Kapitel 23. Das CAUCHYSche Problem für die Wärmeleitungsgleichung	386
§ 1. Einige Eigenschaften der FOURIER-Transformation	386
§ 2. Die Herleitung der POISSONSchen Formel	390
§ 3. Die Begründung der POISSONSchen Formel	393
§ 4. Die unendliche Geschwindigkeit der Wärmeübertragung	396
Kapitel 24. Das CAUCHYSche Problem für die Wellengleichung	398
§ 1. Die Anwendung der FOURIER-Transformation	398
§ 2. Die Umformung der Lösung	400
§ 3. Der Fall des dreidimensionalen Raumes	403
§ 4. Die Begründung der KIRCHHOFFSchen Formel	405
§ 5. Die hintere Wellenfront	408
§ 6. Der Fall $m = 2$ (Die Membranschwingungsgleichung)	409
§ 7. Die Saitenschwingungsgleichung	410
§ 8. Die Wellengleichung mit veränderlichen Koeffizienten	411
Teil VII. Korrekte und nicht korrekte Aufgaben	417
Kapitel 25. Über die Korrektheit der Aufgaben der mathematischen Physik	417
§ 1. Der Hauptsatz	417
§ 2. Positiv-definite Aufgaben	418
§ 3. Das DIRICHLETSche Problem für die homogene LAPLACE-Gleichung	420
§ 4. Das äußere NEUMANNsche Problem	421
§ 5. Das innere NEUMANNsche Problem	423
§ 6. Aufgaben der Wärmeleitung	425
§ 7. Abgeleitete Aufgaben für die Wellengleichung	427
§ 8. Über nicht korrekte Aufgaben der mathematischen Physik	428

Anhänge	431
Anhang 1. Elliptische Systeme	431
Anhang 2. Über das CAUCHYSche Problem für hyperbolische Gleichungen (W. M. BABITSCH)	437
Anhang 3. Einige Fragen der Theorie allgemeiner Differentialoperatoren (W. G. MAZJA)	447
Anhang 4. Nichtlineare elliptische Gleichungen zweiter Ordnung (I. J. BAKELMAN)	456
Literaturhinweise	467
Sachverzeichnis	473