

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>Einführung</b> .....	1
<i>Teil I. Mittelfunktionen und verallgemeinerte Ableitungen</i> .....	7
<b>Kapitel 1. Mittelfunktionen</b> .....	7
§ 1. Der Mittelungskern .....	7
§ 2. Mittelfunktionen .....	9
§ 3. Konvergenz der Mittelfunktionen .....	10
Übungsaufgaben .....	13
<b>Kapitel 2. Verallgemeinerte Ableitungen</b> .....	15
§ 1. Der Begriff der verallgemeinerten Ableitung .....	15
§ 2. Die einfachsten Eigenschaften der verallgemeinerten Ableitung .....	19
§ 3. Grenzwerteigenschaften der verallgemeinerten Ableitungen .....	21
§ 4. Der Fall einer unabhängigen Veränderlichen .....	23
§ 5. Die SOBOLJEWSCHEN RÄUME und Einbettungssätze .....	25
Übungsaufgaben .....	26
<i>Teil II. Elemente der Variationsrechnung</i> .....	27
<b>Kapitel 3. Grundbegriffe</b> .....	27
§ 1. Beispiele zur Ermittlung des Extremums eines Funktionals .....	27
§ 2. Die Aufgabenstellung der Variationsrechnung .....	28
§ 3. Die Variation und der Gradient eines Funktionals .....	31
§ 4. Die EULERSCHE GLEICHUNG .....	39
§ 5. Die zweite Variation. Eine hinreichende Bedingung für das Extremum .....	43
§ 6. Das isoperimetrische Problem .....	44
§ 7. Die Minimalfolge .....	49
Übungsaufgaben .....	49
<b>Kapitel 4. Funktionale, die von reellen Funktionen reeller Veränderlicher abhängen</b> .....	51
§ 1. Das einfachste Variationsproblem .....	51
§ 2. Untersuchung der zweiten Variation .....	53
§ 3. Der Fall mehrerer unabhängiger Veränderlicher .....	55
§ 4. Funktionale, die von Ableitungen höherer Ordnungen abhängen .....	59
§ 5. Funktionale, die von mehreren Funktionen abhängen .....	61
§ 6. Natürliche Randbedingungen .....	63

<b>Kapitel 5. Das Minimum des quadratischen Funktionals</b> .....	70
§ 1. Der Begriff des quadratischen Funktionals .....	70
§ 2. Positiv-definite Operatoren .....	71
§ 3. Der energetische Raum .....	76
§ 4. Das Minimumproblem des quadratischen Funktionals .....	84
§ 5. Die verallgemeinerte Lösung .....	86
§ 6. Über die Separabilität des energetischen Raumes .....	89
§ 7. Die Erweiterung eines positiv-definiten Operators .....	91
§ 8. Das einfachste Randwertproblem für die gewöhnliche lineare Differentialgleichung .....	95
§ 9. Ein allgemeineres Minimumproblem für das quadratische Funktional .....	100
§ 10. Der Fall eines nur positiven Operators .....	102
Übungsaufgaben .....	103
<b>Kapitel 6. Das Eigenspektrum eines positiv-definiten Operators</b> .....	104
§ 1. Der Begriff des Eigenspektrums eines Operators .....	104
§ 2. Eigenwerte und Eigenelemente eines symmetrischen Operators .....	106
§ 3. Das verallgemeinerte Eigenspektrum eines positiv-definiten Operators .....	107
§ 4. Die Variationsfassung des Eigenwertproblems .....	109
§ 5. Der Satz über den kleinsten Eigenwert .....	111
§ 6. Ein Satz über das diskrete Spektrum .....	113
§ 7. Das STURM-LIOUVILLESche Problem .....	117
§ 8. Einige Elementarfälle .....	121
§ 9. Das Mini-Max-Prinzip .....	122
§ 10. Über das Wachstum der Eigenwerte beim STURM-LIOUVILLESchen Problem .....	125
Übungsaufgabe .....	126
<b>Teil III. Elemente der Theorie der Integralgleichungen</b> .....	127
<b>Kapitel 7. Vollstetige Operatoren</b> .....	127
§ 1. Notwendige Kenntnisse aus der Funktionalanalysis .....	127
§ 2. Der FREDHOLMSche Operator .....	129
§ 3. Der Integraloperator mit schwacher Singularität .....	131
§ 4. Operatoren mit schwacher Singularität im Raum der stetigen Funktionen .....	135
Übungsaufgaben .....	137
<b>Kapitel 8. Die FREDHOLMSche Theorie</b> .....	138
§ 1. Gleichungen mit vollstetigen Operatoren. Integralgleichungen .....	138
§ 2. Überführung in eine endlichdimensionale Gleichung. Beweis des ersten und zweiten FREDHOLMSchen Satzes .....	140
§ 3. Beweis des dritten FREDHOLMSchen Satzes .....	143
§ 4. Beweis des vierten FREDHOLMSchen Satzes .....	144
§ 5. Die FREDHOLMSche Alternative .....	147
§ 6. Über die Stetigkeit der Lösungen einer Gleichung mit schwacher Singularität .....	148
<b>Teil IV. Allgemeines über partielle Differentialgleichungen</b> .....	151
<b>Kapitel 9. Differentialgleichungen und Randwertaufgaben</b> .....	151
§ 1. Der Differentialausdruck und die Differentialgleichung .....	151
§ 2. Die Klassifizierung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung .....	153
§ 3. Randbedingungen und Randwertaufgaben .....	156
§ 4. Das CAUCHYSche Problem .....	159
§ 5. Existenz-, Eindeutigkeits- und Korrektheitsprobleme bei Randwertaufgaben .....	160

Kapitel 10. Charakteristiken. Die kanonische Form. Die GREENSchen Formeln ...	165
§ 1. Transformation der unabhängigen Veränderlichen .....	165
§ 2. Charakteristiken. Die Beziehung zwischen den CAUCHYschen Anfangswerten auf der Charakteristik .....	167
§ 3. Transformation der Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf die kanonische Form .....	169
§ 4. Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher .....	170
§ 5. Formal adjungierte Differentialausdrücke .....	173
§ 6. Die GREENSchen Formeln .....	174
<i>Teil V. Gleichungen vom elliptischen Typ</i> .....	179
Kapitel 11. LAPLACE-Gleichung und harmonische Funktionen .....	179
§ 1. Grundbegriffe .....	179
§ 2. Die singuläre Lösung der LAPLACE-Gleichung .....	181
§ 3. Die Integraldarstellung für die Funktionen der Klasse $C^{(2)}$ .....	182
§ 4. Die Integraldarstellung einer harmonischen Funktion .....	185
§ 5. Der Potentialbegriff .....	186
§ 6. Die Eigenschaften des Volumenpotentials .....	188
§ 7. Der Mittelwertsatz .....	196
§ 8. Das Maximumprinzip .....	199
§ 9. Über die Konvergenz von Folgen harmonischer Funktionen .....	201
§ 10. Übertragung auf Gleichungen mit variablen Koeffizienten .....	204
Kapitel 12. Das DIRICHLETSche und das NEUMANNsche Problem .....	210
§ 1. Aufgabenstellung .....	210
§ 2. Unitätssätze für die LAPLACE-Gleichung .....	211
§ 3. Die Lösung des DIRICHLETSchen Problems für die Kugel .....	215
§ 4. Der Satz von LIOUVILLE .....	220
§ 5. Das DIRICHLETSche Problem für das Außengebiet der Kugel .....	221
§ 6. Das Verhalten der Ableitungen einer harmonischen Funktion im Unendlichen .....	223
§ 7. Der Unitätssatz für das äußere NEUMANNsche Problem .....	223
Kapitel 13. Elementare Lösungen der DIRICHLETSchen und NEUMANNschen Probleme .....	226
§ 1. Die DIRICHLETSchen und NEUMANNschen Probleme für den Kreis .....	226
§ 2. Das DIRICHLETSche Problem für das Kreisringgebiet .....	230
§ 3. Anwendung der konformen Abbildungen .....	231
§ 4. Die Kugelfunktionen und ihre Eigenschaften .....	234
§ 5. DIRICHLETSche und NEUMANNsche Probleme, die sich mit Hilfe von Kugelfunktionen lösen lassen .....	237
Übungsaufgaben .....	240
Kapitel 14. Die Variationsmethode beim DIRICHLETSchen Problem. Weitere positiv-definite Probleme .....	241
§ 1. Die FRIEDRICHSSche Ungleichung .....	241
§ 2. Der Operator des DIRICHLETSchen Problems .....	243
§ 3. Der energetische Raum des DIRICHLETSchen Problems .....	246
§ 4. Die verallgemeinerte Lösung des DIRICHLETSchen Problems .....	249
§ 5. Das DIRICHLETSche Problem für die homogene Gleichung .....	251
§ 6. Über die Existenz der zweiten Ableitungen der Lösung des DIRICHLETSchen Problems .....	253
§ 7. Elliptische Differentialgleichungen höherer Ordnung und Gleichungssysteme ...	255

§ 8. Das DIRICHLETSche Problem für das unendliche Gebiet .....	258
Übungsaufgaben .....	260
Kapitel 15. Das Spektrum des DIRICHLETSchen Problems .....	262
§ 1. Integraldarstellung einer Funktion, die auf dem Rande eines endlichen Gebietes verschwindet .....	262
§ 2. Das Spektrum des DIRICHLETSchen Problems für das endliche Gebiet .....	263
§ 3. Einige Elementarfälle .....	265
§ 4. Die Wachstumsordnung der Eigenwerte .....	268
Kapitel 16. Das NEUMANNsche Problem .....	272
§ 1. Der Fall des positiven Koeffizienten $C(x)$ .....	272
§ 2. Der Fall $C(x) \equiv 0$ .....	273
§ 3. Die Integraldarstellung von S. L. SOBOLEW .....	275
§ 4. Untersuchung des Operators $\mathfrak{H}_0$ .....	277
§ 5. Die verallgemeinerte Lösung des NEUMANNschen Problems .....	281
Übungsaufgabe .....	282
Kapitel 17. Nicht selbstadjungierte elliptische Gleichungen .....	284
§ 1. Die verallgemeinerte Lösung .....	284
§ 2. Die FREDHOLMSchen Sätze .....	286
Übungsaufgaben .....	288
Kapitel 18. Die potentialtheoretische Methode bei der homogenen LAPLACE-Gleichung	289
§ 1. LJAPUNOW-Flächen .....	289
§ 2. Der Raumwinkel .....	294
§ 3. Das Potential der Doppelschicht .....	299
§ 4. Das GAUSSsche Integral .....	300
§ 5. Die Grenzwerte des Potentials der Doppelschicht .....	303
§ 6. Die Stetigkeit des Potentials der einfachen Schicht .....	306
§ 7. Die Normalableitung des Potentials der einfachen Schicht .....	308
§ 8. Zurückführung der DIRICHLETSchen und NEUMANNschen Probleme auf Integral- gleichungen .....	312
§ 9. Die DIRICHLETSchen und NEUMANNschen Probleme im Halbraum .....	314
§ 10. Untersuchung des ersten Paares adjungierter Gleichungen .....	316
§ 11. Untersuchung des zweiten Paares adjungierter Gleichungen .....	317
§ 12. Die Lösung des DIRICHLETSchen Problems für das Außengebiet .....	320
§ 13. Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher .....	322
§ 14. Die Gleichungen der Potentialtheorie für den Kreis .....	327
Kapitel 19. Das Problem der Richtungsableitung .....	330
§ 1. Aufgabenstellung .....	330
§ 2. Der HILBERTsche Operator .....	331
§ 3. Gleichungen mit dem HILBERTschen Operator .....	336
§ 4. Die Anzahl der Lösungen und der Index des Problems der Richtungsableitung in der zweidimensionalen Ebene .....	342
Teil VI. Nicht stationäre Gleichungen .....	345
Kapitel 20. Die Wärmeleitungsgleichung .....	345
§ 1. Die Wärmeleitungsgleichung und ihre Charakteristiken .....	345
§ 2. Das Maximumprinzip .....	347

§ 3. DES CAUCHYSche Problem und die gemischte Aufgabe .....	349
§ 4. Eindeutigkeitsätze .....	351
§ 5. Abstrakte Funktionen einer reellen Veränderlichen .....	353
§ 6. Die verallgemeinerte Lösung der gemischten Aufgabe .....	354
<b>Kapitel 21. Die Wellengleichung .....</b>	<b>357</b>
§ 1. Der Begriff der Wellengleichung .....	357
§ 2. Die gemischte Aufgabe und ihre verallgemeinerte Lösung .....	358
§ 3. Die Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten. Das CAUCHYSche Problem. Der charakteristische Kegel .....	361
§ 4. Der Eindeutigkeitsatz für das CAUCHYSche Problem. Das Abhängigkeitsgebiet	362
§ 5. Die Erscheinung der Wellenausbreitung .....	364
§ 6. Die verallgemeinerte Lösung des CAUCHYSchen Problems .....	366
<b>Kapitel 22. Die FOURIERSche Methode .....</b>	<b>369</b>
§ 1. Die FOURIERSche Methode für die Wärmeleitungsgleichung .....	369
§ 2. Die Begründung der Methode .....	371
§ 3. Über die Existenz der klassischen Lösung. Ein Spezialfall .....	374
§ 4. Die FOURIERSche Methode für die Wellengleichung .....	376
§ 5. Die Begründung der Methode für die homogene Gleichung .....	378
§ 6. Die Begründung der Methode für homogene Anfangsbedingungen .....	381
§ 7. Die Saitenschwingungsgleichung. Bedingungen für die Existenz der klassischen Lösung .....	383
<b>Kapitel 23. Das CAUCHYSche Problem für die Wärmeleitungsgleichung .....</b>	<b>386</b>
§ 1. Einige Eigenschaften der FOURIER-Transformation .....	386
§ 2. Die Herleitung der POISSONSchen Formel .....	390
§ 3. Die Begründung der POISSONSchen Formel .....	393
§ 4. Die unendliche Geschwindigkeit der Wärmeübertragung .....	396
<b>Kapitel 24. Das CAUCHYSche Problem für die Wellengleichung .....</b>	<b>398</b>
§ 1. Die Anwendung der FOURIER-Transformation .....	398
§ 2. Die Umformung der Lösung .....	400
§ 3. Der Fall des dreidimensionalen Raumes .....	403
§ 4. Die Begründung der KIRCHHOFFSchen Formel .....	405
§ 5. Die hintere Wellenfront .....	408
§ 6. Der Fall $m = 2$ (Die Membranschwingungsgleichung) .....	409
§ 7. Die Saitenschwingungsgleichung .....	410
§ 8. Die Wellengleichung mit veränderlichen Koeffizienten .....	411
<b>Teil VII. Korrekte und nicht korrekte Aufgaben .....</b>	<b>417</b>
<b>Kapitel 25. Über die Korrektheit der Aufgaben der mathematischen Physik .....</b>	<b>417</b>
§ 1. Der Hauptsatz .....	417
§ 2. Positiv-definite Aufgaben .....	418
§ 3. Das DIRICHLETSche Problem für die homogene LAPLACE-Gleichung .....	420
§ 4. Das äußere NEUMANNsche Problem .....	421
§ 5. Das innere NEUMANNsche Problem .....	423
§ 6. Aufgaben der Wärmeleitung .....	425
§ 7. Abgeleitete Aufgaben für die Wellengleichung .....	427
§ 8. Über nicht korrekte Aufgaben der mathematischen Physik .....	428

Anhänge .....	431
Anhang 1. Elliptische Systeme .....	431
Anhang 2. Über das CAUCHYSche Problem für hyperbolische Gleichungen (W. M. BABITSCH) .....	437
Anhang 3. Einige Fragen der Theorie allgemeiner Differentialoperatoren (W. G. MAZJA) .....	447
Anhang 4. Nichtlineare elliptische Gleichungen zweiter Ordnung (I. J. BAKELMAN) .....	456
Literaturhinweise .....	467
Sachverzeichnis .....	473