

# Inhalt

## 1. Vektoren

1.1. Definition von Vektoren	13
1.1.1. Skalare	13
1.1.2. Vektoren	13
1.1.2.1. Vorläufiges. 1.1.2.2. Bezugssysteme. 1.1.2.3. Komponenten. 1.1.2.4. Koordinatentransformationen. 1.1.2.5. Vektordefinition	
1.1.3. Tensoren	19
1.2. Addition von Vektoren und Multiplikation mit Zahlen	22
1.2.1. Addieren und Subtrahieren	22
1.2.2. Übungen zum Selbsttest: Vektoraddition	24
1.2.3. Multiplikation von Vektoren mit Zahlen	25
1.2.4. Komponentendarstellung der Vektoren	26
1.2.4.1. Einheitsvektoren. 1.2.4.2. Komponenten. 1.2.4.3. Umrechnung zwischen Komponenten- und Pfeildarstellung	
1.2.5. Rechenregeln in Komponentendarstellung	30
1.2.5.1. Addition und Subtraktion. 1.2.5.2. Multiplikation mit Zahlen. 1.2.5.3. Beispiele zur üben Erläuterung	
1.2.6. Übungen zum Selbsttest: Vektoralgebra	32
1.3. Das Innere Produkt von Vektoren	33
1.3.1. Definition	33
1.3.2. Eigenschaften des Inneren Produktes	34
1.3.3. Beispiele zur üben Erläuterung	37
1.3.4. Algebraische Definition des Vektorraumes	39
1.3.5. Übungen zum Selbsttest: Inneres Produkt	40
1.4. Koordinatentransformationen	40
1.4.1. Die Transformationsmatrix	40
1.4.1.1. Beschreibung einer Koordinatendrehung. 1.4.1.2. Zuordnung von Drehungen und Matrizen. 1.4.1.3. Die Determinante der Drehmatrix	
1.4.2. Die Transformationsformeln für Vektoren	44
1.4.3. Beispiele zu üben Erläuterung	46
1.4.4. Die Transformationsformeln für Tensoren	47
1.4.5. Übungen zum Selbsttest: Koordinatentransformationen	48
1.5. Matrizen	49
1.5.1. Definitionen	49
1.5.2. Multiplikation von Matrizen	51
1.5.3. Inverse Matrizen	53
1.5.4. Matrizen – Tensoren – Transformationen	56

1.5.5. Beispiele zur üben-Erläuterung . . . . .	56
1.5.6. Übungen zum Selbsttest: Matrizen . . . . .	58
1.6. Determinanten . . . . .	59
1.6.1. Definition . . . . .	59
1.6.2. Eigenschaften von Determinanten . . . . .	62
1.6.3. Beispiele zur üben-Erläuterung . . . . .	64
1.6.4. Übungen zum Selbsttest: Determinanten . . . . .	67
1.7. Das Äußere Produkt von Vektoren . . . . .	68
1.7.1. Definition . . . . .	68
1.7.2. Eigenschaften des Äußeren Produktes . . . . .	69
1.7.3. Komponentendarstellung des Äußeren Produktes, Transformationsverhalten . . . . .	71
1.7.4. Beispiele zur üben-Erläuterung . . . . .	73
1.7.5. Übungen zum Selbsttest: Äußeres Produkt . . . . .	76
1.8. Mehrfache Vektorprodukte . . . . .	76
1.8.1. Grundregeln . . . . .	76
1.8.2. Spatprodukt dreier Vektoren . . . . .	77
1.8.3. Entwicklungssatz für 3-fache Vektorprodukte . . . . .	78
1.8.4. n-fache Produkte . . . . .	79
1.8.5. Beispiele zur üben-Erläuterung . . . . .	79
1.8.6. Übungen zum Selbsttest: Mehrfachprodukte . . . . .	80
<b>2. Vektorfunktionen</b>	
2.1. Vektorwertige Funktionen . . . . .	82
2.1.1. Definition . . . . .	82
2.1.2. Parameterdarstellung von Raumkurven . . . . .	83
2.2. Ableitung vektorwertiger Funktionen . . . . .	85
2.2.1. Definition der Ableitung . . . . .	85
2.2.2. Beispiele zur üben-Erläuterung . . . . .	86
2.2.3. Rechenregeln für die Vektordifferentiation . . . . .	87
2.2.4. Übungen zum Selbsttest: Ableitung von Vektoren . . . . .	88
2.3. Raumkurven . . . . .	88
2.3.1. Bogenmaß und Tangenten-Einheitsvektor . . . . .	89
2.3.2. Die Normale . . . . .	89
2.3.3. Die Binormale . . . . .	91
2.3.4. Frenetsche Formeln für das begleitende Dreibein . . . . .	91
2.3.5. Beispiele zur üben-Erläuterung . . . . .	92
2.3.6. Übungen zum Selbsttest: Raumkurven . . . . .	93
<b>3. Felder</b>	
3.1. Physikalische Felder . . . . .	94

3.1.1. Allgemeine Definition . . . . .	94
3.1.2. Skalare Felder . . . . .	95
3.1.3. Vektor-Felder . . . . .	97
3.1.4. Übungen zum Selbsttest: Darstellung von Feldern . . . . .	100
3.2. Partielle Ableitungen . . . . .	100
3.2.1. Definition der partiellen Ableitung . . . . .	100
3.2.2. Beispiele – Rechenregeln – Übungen . . . . .	102
3.2.3. Die Kettenregel . . . . .	105
3.2.4. Übungen zum Selbsttest: Partielle Ableitungen . . . . .	106
3.3. Gradient . . . . .	106
3.3.1. Richtungsableitung . . . . .	106
3.3.2. Definition des Gradienten . . . . .	108
3.3.3. Interpretation und Rechenregeln . . . . .	109
3.3.4. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	110
3.3.5. Taylorentwicklung für Felder . . . . .	111
3.3.6. Übungen zum Selbsttest: Der Gradient . . . . .	114
3.4. Divergenz . . . . .	115
3.4.1. Definition der Divergenz von Vektorfeldern . . . . .	115
3.4.2. Beispiele und Rechenregeln . . . . .	116
3.4.3. Interpretation als lokale Quellstärke . . . . .	117
3.4.4. Übungen zum Selbsttest: Die Divergenz . . . . .	119
3.5. Rotation . . . . .	120
3.5.1. Definition der Rotation von Vektorfeldern . . . . .	120
3.5.2. Interpretation als lokale Wirbelstärke . . . . .	121
3.5.3. Eigenschaften und Rechenregeln der Operation $\text{rot}$ . . . . .	122
3.5.4. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	123
3.5.5. Übungen zum Selbsttest: Die Rotation . . . . .	124
3.6. Der Vektor-Differentialoperator $\vec{\nabla}$ (Nabla) . . . . .	125
3.6.1 Formale Zusammenfassung der Vektor-Differentialoperationen durch $\vec{\nabla}$ . . . . .	125
3.6.2. Zusammenfassende Übersicht der Eigenschaften von $\vec{\nabla}$ . . . . .	126
3.6.3. Übungen zum Selbsttest: Der Nabla-Operator . . . . .	127
<b>4. Integration</b>	
4.1. Physikalische Motivation . . . . .	128
4.2. Das Integral über Funktionen . . . . .	134
4.2.1. Definition des (bestimmten) Riemann-Integrals . . . . .	134
4.2.2. Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .	136
4.2.3. Übungen zum Selbsttest: Riemannsummen . . . . .	138
4.2.4. Das unbestimmte Integral . . . . .	139
4.2.5. Einfache Integraltabelle . . . . .	142
4.2.6. Übungen zum Selbsttest: Integrale . . . . .	143

4.3. Methoden zur Berechnung von Integralen	143
4.3.1. Substitution	143
4.3.2. Partielle Integration	145
4.3.3. Übungen zum Selbsttest: Substitution, partielle Integration	147
4.3.4. Integral-Funktionen	148
4.3.5. Numerische Bestimmung von Integralen	148
4.4. Uneigentliche Integrale	149
4.4.1. Definition uneigentlicher Integrale mit unendlichen Grenzen	150
4.4.2. Beispiele zur üben Erläuterung	151
4.4.3. Singuläre Integranden	152
4.4.4. Beispiele zur üben Erläuterung	154
4.4.5. Übungen zum Selbsttest: Uneigentliche Integrale	155
4.5. Parameterintegrale	156
4.5.1. Differentiation eines Parameterintegrals	156
4.5.2. Integration von Parameterintegralen	158
4.5.3. Uneigentliche Parameterintegrale	160
4.5.4. Übungen zum Selbsttest: Parameterintegrale	161
4.6. Die $\delta$ -Funktion	161
4.6.1. Heuristische Motivation	161
4.6.2. Definition der $\delta$ -Funktion	163
4.6.3. Darstellung durch „glatte“ Funktionen	164
4.6.4. Praktischer Umgang	165
4.6.5. Übungen zum Selbsttest: $\delta$ -Funktion	167
<b>5. Vektorintegration</b>	
5.1. (Gewöhnliches) Integral über Vektoren	168
5.1.1. Definition	168
5.1.2. Beispiele zur üben Erläuterung	168
5.1.3. Übungen zum Selbsttest: Integral über Vektoren	170
5.2. Kurvenintegrale	171
5.2.1. Definition	171
5.2.2. Verfahren zur Berechnung	172
5.2.3. Beispiele zur üben Erläuterung	173
5.2.4. Kurvenintegrale über Gradientenfelder: Unabhängigkeit vom Weg	175
5.2.5. Wirbelfreiheit als Kriterium	178
5.2.6. Beispiel	184
5.2.7. Kurvenintegrale mit anderem Vektorcharakter: Skalare Felder, Vektorprodukte	185
5.2.8. Übungen zum Selbsttest: Kurvenintegrale	187
5.2.9. Das Vektorpotential	188
5.3. Flächenintegrale	191
5.3.1. Definition	191

5.3.2. Beschreibung von Flächen im Raum . . . . .	193
5.3.2.1. Kartesische Parameter. 5.3.2.2. Zylinderkoordinaten.	
5.3.2.3. Kugelkoordinaten. 5.3.2.4. Übungen zum Selbsttest: Krummlinige Koordinaten. 5.3.2.5. Flächenelemente	
5.3.3. Doppelintegrale . . . . .	198
5.3.3.1. Definition. 5.3.3.2. Iterierte Integrale. 5.3.3.3. Übungen zum Selbsttest: Doppelintegrale	
5.3.4. Wechsel der Variablen . . . . .	201
5.3.4.1. Parametertransformation. 5.3.4.2. Die Funktionaldeter- minante. 5.3.4.3. Die Transformation von Flächenelementen.	
5.3.4.4. Übungen zum Selbsttest: Variablentransformation	
5.3.5. Berechnung von Flächenintegralen . . . . .	206
5.3.5.1. Zusammenfassung der Formeln. 5.3.5.2. Beispiele zur übenden Erläuterung. 5.3.5.3. Flächenintegrale in Parameterdar- stellung. 5.3.5.4. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	
5.3.6. Übungen zum Selbsttest: Flächenintegrale . . . . .	215
5.4. Volumenintegrale . . . . .	215
5.4.1. Definition . . . . .	216
5.4.2. Dreifachintegrale . . . . .	216
5.4.3. Wechsel der Variablen . . . . .	218
5.4.3.1. Funktionaldeterminante. 5.4.3.2. Transformation von Volumenelementen	
5.4.4. Vektorielle Volumenintegrale . . . . .	222
5.4.5. Beispiele zur übenden Erläuterung . . . . .	222
5.4.6. Übungen zum Selbsttest: Volumenintegrale . . . . .	224

## 6. Integralsätze

6.1. Die Darstellung des Nabla-Operators durch den Limes von Flächeninte- gralen . . . . .	226
6.1.1. Integraldarstellung von $\operatorname{div}$ . . . . .	226
6.1.2. Integraldarstellung von $\vec{\nabla}$ allgemein . . . . .	228
6.2. Der Gaußsche Satz . . . . .	229
6.2.1. Herleitung und Formulierung . . . . .	229
6.2.2. Beispiele und Erläuterungen . . . . .	231
6.2.3. Allgemeine Form des Gaußschen Satzes . . . . .	233
6.2.4. Der Gaußsche Satz in $D$ Dimensionen . . . . .	234
6.3. Partielle Integration mittels Gaußschem Satz . . . . .	235
6.3.1. Methode . . . . .	236
6.3.2. Beispiele . . . . .	236
6.3.3. Der Greensche Satz . . . . .	237
6.4. Übungen zum Selbsttest: Gaußscher Satz . . . . .	238

6.5. Die Darstellung des Nabla-Operators durch den Limes von Kurvenintegralen . . . . .	238
6.5.1. Kurvenintegral-Darstellung von $\vec{\text{rot}}$ . . . . .	238
6.5.2. Kurvenintegral-Darstellung von $\vec{\nabla}$ allgemein . . . . .	240
6.6. Der Stokessche Satz . . . . .	241
6.6.1. Herleitung und Formulierung . . . . .	241
6.6.2. Beispiele und Erläuterungen . . . . .	243
6.6.3. Allgemeine Form des Stokesschen Satzes . . . . .	245
6.6.4. Der Stokessche Satz in D Dimensionen . . . . .	246
6.7. Übungen zum Selbsttest: Stokesscher Satz . . . . .	247
6.8. Die Integralsätze in D = 4 Dimensionen . . . . .	248

## 7. Krummlinige Koordinaten

7.1. Lokale Koordinatensysteme . . . . .	250
7.1.1. Das Linienelement in krummlinigen Koordinaten . . . . .	250
7.1.2. Krummlinig-orthogonale Koordinaten . . . . .	251
7.1.3. Zylinder- und Kugelkoordinaten als Beispiele . . . . .	253
7.1.4. Übungen zum Selbsttest: Krummlinig-orthogonale Koordinatensysteme . . . . .	253
7.2. Differentialoperatoren in krummlinig-orthogonalen Koordinaten . . . . .	254
7.2.1. grad, div, rot, $\Delta$ allgemein . . . . .	254
7.2.2. Die Formeln in Zylinderkoordinaten . . . . .	256
7.2.3. Die Formeln in Kugelkoordinaten . . . . .	257
7.2.4. Übungen zum Selbsttest: Differentialoperationen in krummlinigen Koordinaten . . . . .	258

## 8. Randwertprobleme

8.1. Die Rolle der Randbedingungen; Eindeutigkeitssatz . . . . .	259
8.2. Bestimmung eines wirbelfreien Feldes aus seinen Quellen und Randwerten . . . . .	263
8.2.1. Feld einer Ladungsverteilung im unendlichen Raum . . . . .	263
8.2.2. Feld einer Ladungsverteilung bei endlichem Rand; Greensche Funktionen . . . . .	266
8.3. Wirbel- und quellenfreie Vektorfelder . . . . .	270
8.4. Bestimmung eines quellenfreien (inkompressiblen) Feldes aus seinen Wirbeln . . . . .	271
8.4.1. Wirbelfeld im unendlichen Raum . . . . .	272
8.4.2. Wirbelfeld im endlichen Bereich . . . . .	273
8.5. Der (Helmholtzsche) Hauptsatz der Vektoranalysis . . . . .	275

	Inhalt	11
8.6. Vektordifferentialgleichungen . . . . .		276
8.6.1. Elektromagnetische Felder . . . . .		276
8.6.1.1. Statische Felder. 8.6.1.2. Feldgetriebene Ströme in Leitern. 8.6.1.3. Elektromagnetische Wellen.		
8.6.2. Elastische Körper . . . . .		281
8.6.3. Flüssigkeitsströmungen . . . . .		282
8.6.4. Reduktion der Vektorpotentialgleichung auf eine Amplitudengleichung . . . . .		284
8.6.5. Zusammenfassung in Darstellungssätzen . . . . .		288
 <b>Anhang</b>		
Lösungen der Übungen zum Selbsttest . . . . .		290
Kleine Literaturlauswahl . . . . .		300
 <b>Sachverzeichnis</b> . . . . .		 301