

Inhalt

1. Vektoren

1.1. Definition von Vektoren	13
1.1.1. Skalare	13
1.1.2. Vektoren	13
1.1.2.1. Vorläufiges. 1.1.2.2. Bezugssysteme. 1.1.2.3. Komponenten. 1.1.2.4. Koordinatentransformationen. 1.1.2.5. Vektordefinition	
1.1.3. Tensoren	19
1.2. Addition von Vektoren und Multiplikation mit Zahlen	22
1.2.1. Addieren und Subtrahieren	22
1.2.2. Übungen zum Selbsttest: Vektoraddition	24
1.2.3. Multiplikation von Vektoren mit Zahlen	25
1.2.4. Komponentendarstellung der Vektoren	26
1.2.4.1. Einheitsvektoren. 1.2.4.2. Komponenten. 1.2.4.3. Umrechnung zwischen Komponenten- und Pfeildarstellung	
1.2.5. Rechenregeln in Komponentendarstellung	30
1.2.5.1. Addition und Subtraktion. 1.2.5.2. Multiplikation mit Zahlen. 1.2.5.3. Beispiele zur üben Erläuterung	
1.2.6. Übungen zum Selbsttest: Vektoralgebra	32
1.3. Das Innere Produkt von Vektoren	33
1.3.1. Definition	33
1.3.2. Eigenschaften des Inneren Produktes	34
1.3.3. Beispiele zur üben Erläuterung	37
1.3.4. Algebraische Definition des Vektorraumes	39
1.3.5. Übungen zum Selbsttest: Inneres Produkt	40
1.4. Koordinatentransformationen	40
1.4.1. Die Transformationsmatrix	40
1.4.1.1. Beschreibung einer Koordinatendrehung. 1.4.1.2. Zuordnung von Drehungen und Matrizen. 1.4.1.3. Die Determinante der Drehmatrix	
1.4.2. Die Transformationsformeln für Vektoren	44
1.4.3. Beispiele zu üben Erläuterung	46
1.4.4. Die Transformationsformeln für Tensoren	47
1.4.5. Übungen zum Selbsttest: Koordinatentransformationen	48
1.5. Matrizen	49
1.5.1. Definitionen	49
1.5.2. Multiplikation von Matrizen	51
1.5.3. Inverse Matrizen	53
1.5.4. Matrizen – Tensoren – Transformationen	56

1.5.5. Beispiele zur üben-Erläuterung	56
1.5.6. Übungen zum Selbsttest: Matrizen	58
1.6. Determinanten	59
1.6.1. Definition	59
1.6.2. Eigenschaften von Determinanten	62
1.6.3. Beispiele zur üben-Erläuterung	64
1.6.4. Übungen zum Selbsttest: Determinanten	67
1.7. Das Äußere Produkt von Vektoren	68
1.7.1. Definition	68
1.7.2. Eigenschaften des Äußeren Produktes	69
1.7.3. Komponentendarstellung des Äußeren Produktes, Transformationsverhalten	71
1.7.4. Beispiele zur üben-Erläuterung	73
1.7.5. Übungen zum Selbsttest: Äußeres Produkt	76
1.8. Mehrfache Vektorprodukte	76
1.8.1. Grundregeln	76
1.8.2. Spatprodukt dreier Vektoren	77
1.8.3. Entwicklungssatz für 3-fache Vektorprodukte	78
1.8.4. n-fache Produkte	79
1.8.5. Beispiele zur üben-Erläuterung	79
1.8.6. Übungen zum Selbsttest: Mehrfachprodukte	80
2. Vektorfunktionen	
2.1. Vektorwertige Funktionen	82
2.1.1. Definition	82
2.1.2. Parameterdarstellung von Raumkurven	83
2.2. Ableitung vektorwertiger Funktionen	85
2.2.1. Definition der Ableitung	85
2.2.2. Beispiele zur üben-Erläuterung	86
2.2.3. Rechenregeln für die Vektordifferentiation	87
2.2.4. Übungen zum Selbsttest: Ableitung von Vektoren	88
2.3. Raumkurven	88
2.3.1. Bogenmaß und Tangenten-Einheitsvektor	89
2.3.2. Die Normale	89
2.3.3. Die Binormale	91
2.3.4. Frenetsche Formeln für das begleitende Dreibein	91
2.3.5. Beispiele zur üben-Erläuterung	92
2.3.6. Übungen zum Selbsttest: Raumkurven	93
3. Felder	
3.1. Physikalische Felder	94

3.1.1. Allgemeine Definition	94
3.1.2. Skalare Felder	95
3.1.3. Vektor-Felder	97
3.1.4. Übungen zum Selbsttest: Darstellung von Feldern	100
3.2. Partielle Ableitungen	100
3.2.1. Definition der partiellen Ableitung	100
3.2.2. Beispiele – Rechenregeln – Übungen	102
3.2.3. Die Kettenregel	105
3.2.4. Übungen zum Selbsttest: Partielle Ableitungen	106
3.3. Gradient	106
3.3.1. Richtungsableitung	106
3.3.2. Definition des Gradienten	108
3.3.3. Interpretation und Rechenregeln	109
3.3.4. Beispiele zur üben Erläuterung	110
3.3.5. Taylorentwicklung für Felder	111
3.3.6. Übungen zum Selbsttest: Der Gradient	114
3.4. Divergenz	115
3.4.1. Definition der Divergenz von Vektorfeldern	115
3.4.2. Beispiele und Rechenregeln	116
3.4.3. Interpretation als lokale Quellstärke	117
3.4.4. Übungen zum Selbsttest: Die Divergenz	119
3.5. Rotation	120
3.5.1. Definition der Rotation von Vektorfeldern	120
3.5.2. Interpretation als lokale Wirbelstärke	121
3.5.3. Eigenschaften und Rechenregeln der Operation rot	122
3.5.4. Beispiele zur üben Erläuterung	123
3.5.5. Übungen zum Selbsttest: Die Rotation	124
3.6. Der Vektor-Differentialoperator $\vec{\nabla}$ (Nabla)	125
3.6.1 Formale Zusammenfassung der Vektor-Differentialoperationen durch $\vec{\nabla}$	125
3.6.2. Zusammenfassende Übersicht der Eigenschaften von $\vec{\nabla}$	126
3.6.3. Übungen zum Selbsttest: Der Nabla-Operator	127
4. Integration	
4.1. Physikalische Motivation	128
4.2. Das Integral über Funktionen	134
4.2.1. Definition des (bestimmten) Riemann-Integrals	134
4.2.2. Eigenschaften des bestimmten Integrals	136
4.2.3. Übungen zum Selbsttest: Riemannsummen	138
4.2.4. Das unbestimmte Integral	139
4.2.5. Einfache Integraltabelle	142
4.2.6. Übungen zum Selbsttest: Integrale	143

4.3. Methoden zur Berechnung von Integralen	143
4.3.1. Substitution	143
4.3.2. Partielle Integration	145
4.3.3. Übungen zum Selbsttest: Substitution, partielle Integration	147
4.3.4. Integral-Funktionen	148
4.3.5. Numerische Bestimmung von Integralen	148
4.4. Uneigentliche Integrale	149
4.4.1. Definition uneigentlicher Integrale mit unendlichen Grenzen	150
4.4.2. Beispiele zur üben Erläuterung	151
4.4.3. Singuläre Integranden	152
4.4.4. Beispiele zur üben Erläuterung	154
4.4.5. Übungen zum Selbsttest: Uneigentliche Integrale	155
4.5. Parameterintegrale	156
4.5.1. Differentiation eines Parameterintegrals	156
4.5.2. Integration von Parameterintegralen	158
4.5.3. Uneigentliche Parameterintegrale	160
4.5.4. Übungen zum Selbsttest: Parameterintegrale	161
4.6. Die δ -Funktion	161
4.6.1. Heuristische Motivation	161
4.6.2. Definition der δ -Funktion	163
4.6.3. Darstellung durch „glatte“ Funktionen	164
4.6.4. Praktischer Umgang	165
4.6.5. Übungen zum Selbsttest: δ -Funktion	167
5. Vektorintegration	
5.1. (Gewöhnliches) Integral über Vektoren	168
5.1.1. Definition	168
5.1.2. Beispiele zur üben Erläuterung	168
5.1.3. Übungen zum Selbsttest: Integral über Vektoren	170
5.2. Kurvenintegrale	171
5.2.1. Definition	171
5.2.2. Verfahren zur Berechnung	172
5.2.3. Beispiele zur üben Erläuterung	173
5.2.4. Kurvenintegrale über Gradientenfelder: Unabhängigkeit vom Weg	175
5.2.5. Wirbelfreiheit als Kriterium	178
5.2.6. Beispiel	184
5.2.7. Kurvenintegrale mit anderem Vektorcharakter: Skalare Felder, Vektorprodukte	185
5.2.8. Übungen zum Selbsttest: Kurvenintegrale	187
5.2.9. Das Vektorpotential	188
5.3. Flächenintegrale	191
5.3.1. Definition	191

5.3.2. Beschreibung von Flächen im Raum	193
5.3.2.1. Kartesische Parameter. 5.3.2.2. Zylinderkoordinaten. 5.3.2.3. Kugelkoordinaten. 5.3.2.4. Übungen zum Selbsttest: Krummlinige Koordinaten. 5.3.2.5. Flächenelemente	
5.3.3. Doppelintegrale	198
5.3.3.1. Definition. 5.3.3.2. Iterierte Integrale. 5.3.3.3. Übungen zum Selbsttest: Doppelintegrale	
5.3.4. Wechsel der Variablen	201
5.3.4.1. Parametertransformation. 5.3.4.2. Die Funktionaldeter- minante. 5.3.4.3. Die Transformation von Flächenelementen. 5.3.4.4. Übungen zum Selbsttest: Variablentransformation	
5.3.5. Berechnung von Flächenintegralen	206
5.3.5.1. Zusammenfassung der Formeln. 5.3.5.2. Beispiele zur übenden Erläuterung. 5.3.5.3. Flächenintegrale in Parameterdar- stellung. 5.3.5.4. Beispiele zur übenden Erläuterung	
5.3.6. Übungen zum Selbsttest: Flächenintegrale	215
5.4. Volumenintegrale	215
5.4.1. Definition	216
5.4.2. Dreifachintegrale	216
5.4.3. Wechsel der Variablen	218
5.4.3.1. Funktionaldeterminante. 5.4.3.2. Transformation von Volumenelementen	
5.4.4. Vektorielle Volumenintegrale	222
5.4.5. Beispiele zur übenden Erläuterung	222
5.4.6. Übungen zum Selbsttest: Volumenintegrale	224

6. Integralsätze

6.1. Die Darstellung des Nabla-Operators durch den Limes von Flächeninte- gralen	226
6.1.1. Integraldarstellung von div	226
6.1.2. Integraldarstellung von $\vec{\nabla}$ allgemein	228
6.2. Der Gaußsche Satz	229
6.2.1. Herleitung und Formulierung	229
6.2.2. Beispiele und Erläuterungen	231
6.2.3. Allgemeine Form des Gaußschen Satzes	233
6.2.4. Der Gaußsche Satz in D Dimensionen	234
6.3. Partielle Integration mittels Gaußschem Satz	235
6.3.1. Methode	236
6.3.2. Beispiele	236
6.3.3. Der Greensche Satz	237
6.4. Übungen zum Selbsttest: Gaußscher Satz	238

6.5. Die Darstellung des Nabla-Operators durch den Limes von Kurvenintegralen	238
6.5.1. Kurvenintegral-Darstellung von rot	238
6.5.2. Kurvenintegral-Darstellung von $\vec{\nabla}$ allgemein	240
6.6. Der Stokessche Satz	241
6.6.1. Herleitung und Formulierung	241
6.6.2. Beispiele und Erläuterungen	243
6.6.3. Allgemeine Form des Stokesschen Satzes	245
6.6.4. Der Stokessche Satz in D Dimensionen	246
6.7. Übungen zum Selbsttest: Stokesscher Satz	247
6.8. Die Integralsätze in D = 4 Dimensionen	248

7. Krummlinige Koordinaten

7.1. Lokale Koordinatensysteme	250
7.1.1. Das Linienelement in krummlinigen Koordinaten	250
7.1.2. Krummlinig-orthogonale Koordinaten	251
7.1.3. Zylinder- und Kugelkoordinaten als Beispiele	253
7.1.4. Übungen zum Selbsttest: Krummlinig-orthogonale Koordinatensysteme	253
7.2. Differentialoperatoren in krummlinig-orthogonalen Koordinaten	254
7.2.1. grad , div , rot , Δ allgemein	254
7.2.2. Die Formeln in Zylinderkoordinaten	256
7.2.3. Die Formeln in Kugelkoordinaten	257
7.2.4. Übungen zum Selbsttest: Differentialoperationen in krummlinigen Koordinaten	258

8. Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1. Physikalische Motivation	260
8.2. Lösen von Differentialgleichungen	263
8.3. Trennung der Variablen	264
8.3.1. Verfahren	264
8.3.2. Beispiele zur übenden Erläuterung	266
8.3.3. Separable Differentialgleichungen	269
8.4. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	271
8.5. Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	273
8.5.1. Homogene Gleichungen	273
8.5.2. Gekoppelte homogene Differentialgleichungen (N Variable)	276
8.5.3. Inhomogene Differentialgleichungen	278
8.6. Geometrische Methoden	279

	Inhalt	11
8.7. Chaos		281
8.8. Iterative Lösungsverfahren (Algorithmen)		287
8.8.1. Euler-Cauchysches Polygonzugverfahren		287
8.8.2. Integralgleichungsverfahren		288
8.8.3. Praxis iterativer Verfahren		290
8.9. Übungen zum Selbsttest; Differentialgleichungen		291
9. Randwertprobleme		
9.1. Die Rolle der Randbedingungen; Eindeutigkeitsatz		294
9.2. Bestimmung eines wirbelfreien Feldes aus seinen Quellen und Randwerten		298
9.2.1. Feld einer Ladungsverteilung im unendlichen Raum		298
9.2.2. Feld einer Ladungsverteilung bei endlichem Rand; Greensche Funktionen		301
9.3. Wirbel- und quellenfreie Vektorfelder		305
9.4. Bestimmung eines quellenfreien (inkompressiblen) Feldes aus seinen Wirbeln		306
9.4.1. Wirbelfeld im unendlichen Raum		307
9.4.2. Wirbelfeld im endlichen Bereich		308
9.5. Der (Helmholtzsche) Hauptsatz der Vektoranalysis		310
9.6. Vektordifferentialgleichungen		311
9.6.1. Elektromagnetische Felder		311
9.6.1.1. Statistische Felder 9.6.1.2. Feldgetriebene Ströme in Leitern. 9.6.1.3. Elektromagnetische Wellen		
9.6.2. Elastische Körper		316
9.6.3. Flüssigkeitsströmungen		317
9.6.4. Reduktion der Vektorpotentialgleichung auf eine Amplitudengleichung		319
9.6.5. Zusammenfassung in Darstellungssätzen		323
Anhang		
Lösungen der Übungen zum Selbsttest		325
Kleine Literaturlauswahl		337
Sachverzeichnis		338