

INHALT

1 DIE MATHEMATIK DER THERMODYNAMIK

1.1	Einführung	17
1.2	Differentiation von Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen	18
1.3	Totale Differentiale	19
1.4	Differentiale höherer Ordnung	21
1.5	Implizite Funktionen	23
1.6	Implizite Funktionen in der Thermodynamik	24
1.7	Totale Differentiale und Linienintegrale	25
1.8	Totale und nichttotale Differentiale in der Thermodynamik	26
1.9	Die Hauptsätze der Thermodynamik	29
1.10	Systematische Herleitung der thermodynamischen partiellen Ableitungen	33
1.11	Gewinnung thermodynamischer Ableitungen durch Funktionaldeterminanten	36
1.12	Eigenschaften der Funktionaldeterminante	37
1.13	Anwendung auf die Thermodynamik	39
1.14	Thermodynamische Systeme mit veränderlicher Masse	45
1.15	Das Prinzip von Carathéodory	47

2 GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

2.1	Vorbemerkungen	54
2.2	Die Variablen sind trennbar	55
2.3	Exakte Differentialgleichungen. Lineare Gleichungen	64
2.4	Differentialgleichungen, die sich auf lineare zurückführen lassen	68
2.5	Homogene Differentialgleichungen	68
2.6	Bemerkung über singuläre Lösungen. Die Clairautsche Differentialgleichung	71
2.7	Homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten	73
2.8	Inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten	78
2.9	Andere spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	83
2.10	Qualitative Betrachtungen zu Gleichung 27	86
2.11	Ein Beispiel für die Integration durch Reihen. Die Legendresche Differentialgleichung	88
2.12	Allgemeines über Integration durch Reihen. Das Fuchssche Theorem	98
2.13	Die Hypergeometrische (Gaußsche) Differentialgleichung	101
2.14	Die Besselsche Differentialgleichung	104

2.15	Die Hermiteische Differentialgleichung	106
2.16	Die Laguerresche Differentialgleichung	107
2.17	Die Mathieusche Differentialgleichung	109
2.18	Die Pfaffsche Form und Differentialgleichung	113

3 SPEZIELLE FUNKTIONEN

3.1	Grundlagen der Integration im Komplexen. Cauchysche Integralsätze	121
3.1a	Der Satz von Laurent. Residuen	123
3.2	Die Gammafunktion	127
3.3	Die Legendreschen Polynome	133
3.4	Die Integraleigenschaften der Legendreschen Polynome	138
3.5	Rekursionsformeln für die Legendreschen Polynome	140
3.6	Die zugeordneten Legendreschen Polynome	142
3.7	Das Additionstheorem der Legendreschen Polynome	145
3.8	Die Besselfunktionen	150
3.9	Die Hankelschen Funktionen. Weitere Eigenschaften der Besselfunktionen	156
3.10	Die Hermiteischen Polynome und Funktionen	160
3.11	Die Laguerreschen Polynome und Funktionen	166
3.12	Die erzeugenden Funktionen	172
3.13	Die lineare Abhängigkeit	173
3.14	Die Schwarzsche Ungleichung	175

4 VEKTORANALYSIS

4.1	Definition eines Vektors	178
4.2	Einheitsvektoren	181
4.3	Addition und Subtraktion von Vektoren	182
4.4	Das Skalarprodukt zweier Vektoren	183
4.5	Das Vektorprodukt zweier Vektoren	184
4.6	Produkte, die drei Vektoren enthalten	188
4.7	Differentiation von Vektoren	191
4.8	Skalar- und Vektorfelder	192
4.9	Der Gradient	193
4.10	Die Divergenz	194
4.11	Der Rotor	196
4.12	Zusammengesetzte Funktionen, die ∇ enthalten	197
4.13	Sukzessive Anwendung von ∇	197
4.14	Vektorintegration	198
4.15	Kurvenintegrale	199
4.16	Oberflächen- und Volumenintegrale	201
4.17	Der Stokessche Satz	202
4.18	Der Gaußsche Integralsatz	204

4.19	Die Greenschen Sätze	206
4.20	Tensoren	207
4.21	Addition, Multiplikation und Verjüngung	210
4.22	Differentiation von Tensoren	214
4.23	Tensoren und der elastische Körper	217
5	KOORDINATENSYSTEME (Vektoren und krummlinige Koordinaten)	
5.1	Krummlinige Koordinaten	220
5.2	Vektorbeziehungen in krummlinigen Koordinaten	222
5.3	Kartesische Koordinaten	226
5.4	Kugelkoordinaten	226
5.5	Zylinderkoordinaten	227
5.6	Elliptische Koordinaten	227
5.7	Koordinaten des gestreckten Rotationsellipsoids	229
5.8	Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids	231
5.9	Koordinaten des elliptischen Zylinders	232
5.10	Kegelkoordinaten	232
5.11	Parabolische Koordinaten	233
5.12	Rotationsparabolische Koordinaten	235
5.13	Koordinaten des parabolischen Zylinders	236
5.14	Bipolarkoordinaten	236
5.15	Toruskoordinaten	240
5.16	Tensorbeziehungen in krummlinigen Koordinaten	242
5.17	Die Differentialoperatoren in Tensorschreibweise	246
6	VARIATIONSRECHNUNG	
6.1	Eine unabhängige und eine abhängige Variable	250
6.2	Mehrere abhängige Variable	257
6.3	Beispiel: Das Hamiltonsche Prinzip	258
6.4	Mehrere unabhängige Variable	260
6.5	Nebenbedingungen; die Lagrangeschen Multiplikatoren	263
6.6	Die Schrödingergleichung	267
6.7	Schlußbemerkungen	269
7	DIE PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER KLASSISCHEN PHYSIK	
7.1	Allgemeines	271
7.2	Die Laplacesche Differentialgleichung (Potentialgleichung)	272
7.3	Die zweidimensionale Potentialgleichung	273

7.4	Die dreidimensionale Potentialgleichung	276
7.5	Die Bewegung einer Kugel durch eine inkompressible Flüssigkeit ohne Wirbelbildung	280
7.6	Einfache elektrostatische Potentiale	281
7.7	Leitende Kugel im Feld einer Punktladung	283
7.8	Die Wellengleichung	285
7.9	Eindimensionaler Fall	288
7.10	Zweidimensionaler Fall	289
7.11	Dreidimensionaler Fall	289
7.12	Beispiele für die Lösung der Wellengleichung	294
7.13	Die Wärmeleitungs- und Diffusionsgleichung	296
7.14	Beispiel: Die lineare Wärmeleitung	297
7.15	Die zweidimensionale Wärmeleitung	299
7.16	Die Wärmeleitung im Dreidimensionalen	300
7.17	Die Poissonsche Gleichung	301

8 EIGENWERTE UND EIGENFUNKTIONEN

8.1	Einfache Beispiele von Eigenwertproblemen	306
8.2	Die schwingende Saite; Fourieranalyse	307
8.3	Die Schwingung einer kreisförmigen Membran; Fourier-Bessel- Transformierte	315
8.4	Die in sich schwingende Kugel bei festgehaltener Oberfläche	319
8.5	Die Laplace- und ähnliche Transformationen	321
8.6	Die Verwendung neuer Transformationen bei der Lösung von Differential- gleichungen	326
8.7	Die Sturm-Liouvillesche Theorie	331
8.8	Variationsrechnung und Eigenwertprobleme	334
8.9	Die Verteilung höherer Eigenwerte	339
8.10	Die Vollständigkeit der Eigenfunktionen	342
8.11	Weitere Bemerkungen und Verallgemeinerungen	344

9 MECHANIK DER MOLEKÜLE

9.1	Einführung	348
9.2	Allgemeine Prinzipien der klassischen Mechanik	348
9.3	Der starre Körper in der klassischen Mechanik	351
9.4	Geschwindigkeit, Drehimpuls und kinetische Energie	352
9.5	Die Eulerschen Winkel	353
9.6	Absolute und relative Geschwindigkeit	357
9.7	Bewegung eines Moleküls	358
9.8	Die kinetische Energie eines Moleküls	359

9.9	Die Hamiltonsche Form der kinetischen Energie	361
9.10	Die Schwingungsenergie eines Moleküls	363
9.11	Schwingungen eines linearen dreiatomigen Moleküls	366
9.12	Die quantenmechanische Hamilton-Funktion	368

10 MATRIZEN UND MATRIZENALGEBRA

10.1	Anordnungen oder Schemata	372
10.2	Determinanten	372
10.3	Unterdeterminanten und algebraische Komplemente	374
10.4	Multiplikation und Differentiation von Determinanten	375
10.5	Vorläufige Bemerkungen über Matrizen	376
10.6	Verknüpfung von Matrizen	377
10.7	Spezielle Matrizen	379
10.8	Reelle lineare Vektorräume	384
10.9	Lineare Gleichungssysteme	387
10.10	Lineare Transformationen	389
10.11	Äquivalente Matrizen	391
10.12	Bilineare und quadratische Formen	392
10.13	Ähnlichkeitstransformationen	393
10.14	Die charakteristische Gleichung einer Matrix	394
10.15	Reduktion einer Matrix auf die Diagonalf orm	395
10.16	Kongruenztransformationen	399
10.17	Orthogonale Transformationen	401
10.18	Der Hermitesche Vektorraum	407
10.19	Hermitesche Matrizen	408
10.20	Unitäre Matrizen	409
10.21	Zusammenfassende Betrachtungen über die Diagonalisierung von Matrizen	410

11 QUANTENMECHANIK

11.1	Einführung	412
11.2	Definitionen	414
11.3	Postulate	418
11.4	Orthogonalität und Vollständigkeit der Eigenfunktionen	425
11.5	Relative Wahrscheinlichkeit von Meßwerten	427
11.6	Anschauliche Bedeutung der Zustandsfunktion	429
11.7	Vertauschbare Operatoren	429
11.8	Die Unbestimmtheitsrelation	430
11.9	Freier Massenpunkt	432
11.10	Eindimensionale Potentialschwellen	436
11.11	Der einfache harmonische Oszillator	441

11.12	Der starre Rotator. Eigenwerte und Eigenfunktionen von L^2	443
11.13	Bewegung in einem Zentralfeld	446
11.14	Der symmetrische Kreisel	452
11.15	Allgemeine Bemerkungen	455
11.16	Der einfache harmonische Oszillator	457
11.17	Die Äquivalenz von Operatoren- und Matrizenmethode	459
11.18	Variations- (Ritzsche) Methode	463
11.19	Beispiel: Der Grundzustand des Heliumatoms	466
11.20	Die Methode der Variation einer Linearkombination	470
11.21	Beispiel: Das Ion des Wasserstoffmoleküls	471
11.22	Störungstheorie	475
11.23	Beispiel: Nichtentarteter Fall. Der Stark-Effekt	479
11.24	Beispiel: Entarteter Fall. Der normale Zeeman-Effekt	480
11.25	Allgemeine Überlegungen	481
11.26	Das freie Teilchen; Wellenpakete	484
11.27	Kontinuitätsgleichung. Teilchenstromdichte	488
11.28	Anwendung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung. Einfache Strahlungstheorie	489
11.29	Grundlagen der Theorie	492
11.30	Anwendungen	499
11.31	Separation von Schwerpunktskoordinaten	502
11.32	Unabhängige Systeme	505
11.33	Das Ausschließungsprinzip	507
11.34	Angeregte Zustände des Heliumatoms	510
11.35	Das Wasserstoffmolekül	518

12 STATISTISCHE MECHANIK

12.1	Permutationen und Kombinationen	526
12.2	Binomialkoeffizienten	529
12.3	Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	530
12.4	Spezielle Verteilungen	533
12.5	Die Gibbsschen Gesamtheiten	538
12.6	Gesamtheiten und Thermodynamik	541
12.7	Weitere Betrachtungen zur kanonischen Gesamtheit	546
12.8	Die Methode von Darwin und Fowler	550
12.9	Quantenmechanische Verteilungsgesetze	551
12.10	Die Sattelpunktmethode	558

13 NUMERISCHE METHODEN

13.1	Einführung	567
13.2	Interpolation für gleiche Schrittweite des Arguments	568

13.3	Interpolation bei ungleicher Schrittweite des Arguments	571
13.4	Inverse Interpolation	572
13.5	Zwei-Wege-Interpolation	573
13.6	Differentiation unter Verwendung von Interpolationsformeln	573
13.7	Differentiation durch Verwendung eines Polynoms	574
13.8	Einführung	576
13.9	Die Euler-Maclaurinsche Formel	576
13.10	Die Formel von Gregory	578
13.11	Die Newton-Cotesche Formel	579
13.12	Die Methode von Gauß	582
13.13	Bemerkungen über Quadraturformeln	585
13.14	Einführung in die Methoden zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen	586
13.15	Integration mit Hilfe der Taylor-Reihe	587
13.16	Das Verfahren von Picard (Methode der sukzessiven Approximation oder Iterationsverfahren)	589
13.17	Das modifizierte Eulersche Verfahren	590
13.18	Das Verfahren von Runge-Kutta	592
13.19	Fortsetzung der Lösung	593
13.20	Das Verfahren von Milne	595
13.21	Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	596
13.22	Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung	597
13.23	Die numerische Auflösung von transzendenten Gleichungen	598
13.24	Mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten	601
13.25	Numerische Bestimmung der Wurzeln von Polynomen	602
13.26	Numerische Lösung von linearen Gleichungssystemen	606
13.27	Berechnung von Determinanten	609
13.28	Die Auflösung von Säkulargleichungen	609
13.29	Fehler	614
13.30	Das Prinzip der kleinsten Quadrate	617
13.31	Fehler und Abweichungen	618
13.32	Genauigkeitsmaße	621
13.33	Genauigkeitsmaße und Abweichungen	625
13.34	Experimentelle Messungen mit ungleichem Gewicht	627
13.35	Der wahrscheinliche Fehler einer Funktion	627
13.36	Verwerfung von Beobachtungsergebnissen	628
13.37	Empirische Formeln	629

14 LINEARE INTEGRALGLEICHUNGEN

14.1	Definition und Bezeichnungen	635
14.2	Die Liouville-Neumannsche Reihe	636
14.3	Das Fredholmsche Lösungsverfahren	642

14.4	Das Schmidt-Hilbertsche Lösungsverfahren.....	644
14.5	Zusammenfassung der Lösungsverfahren.....	648
14.6	Der Zusammenhang zwischen Differential- und Integralgleichungen	648
14.7	Die Greensche Funktion.....	650
14.8	Die inhomogene Sturm-Liouvillesche Gleichung.....	655
14.9	Einige Beispiele für die Greensche Funktion.....	657
14.10	Die Abelsche Integralgleichung.....	659
14.11	Schwingungsprobleme.....	660

15 GRUPPENTHEORIE (Die Eigenschaften einer Gruppe)

15.1	Definition.....	663
15.2	Untergruppen.....	665
15.3	Klassen.....	665
15.4	Komplexe.....	666
15.5	Konjugierte Untergruppen.....	667
15.6	Der Isomorphismus.....	668
15.7	Die Darstellung von Gruppen.....	669
15.8	Die Reduktion einer Darstellung.....	671
15.9	Der Charakter.....	673
15.10	Das indirekte Produkt.....	676
15.11	Die zyklische Gruppe.....	676
15.12	Die symmetrische Gruppe.....	677
15.13	Die alternierende Gruppe.....	681
15.14	Die unitäre Gruppe.....	683
15.15	Die dreidimensionale Drehgruppe.....	686
15.16	Die zweidimensionalen Drehgruppen.....	691
15.17	Die Diedergruppen.....	694
15.18	Die kristallographischen Punktgruppen.....	696
15.19	Anwendungen der Gruppentheorie.....	705