

## INHALTSVERZEICHNIS.

	Seite
0. Einführung	1
1. Darstellung von Zahlen und Fehleranalyse	4
1.1 Definition von Fehlergrößen	4
1.2 Dezimaldarstellung von Zahlen	6
1.3 Rundungsvorschriften für Dezimalzahlen	7
1.4 Schreibweise für Näherungszahlen und Regeln zur Bestimmung der Anzahl sicherer Stellen	10
1.5 Fehlerquellen	12
1.5.1 Der Verfahrensfehler	12
1.5.2 Der Eingangsfehler	13
1.5.3 Der Rechnungsfehler	16
2. Numerische Verfahren zur Lösung algebraischer und transzendenter Gleichungen	20
2.1 Vorbemerkungen und Motivation	20
2.2 Iterationsverfahren	22
2.2.1 Konstruktionsmethode und Definition	22
2.2.2 Existenz von Lösungen und Eindeutigkeit der Lösungen	25
2.2.3 Konvergenz eines Iterationsverfahrens	28
2.2.3.1 Heuristische Betrachtung	28
2.2.3.2 Analytische Betrachtung	29
2.2.4 Fehlerabschätzungen	31
2.2.5 Praktische Durchführung und Anwendungsbeispiel	35
2.2.5.1 Algorithmus	35
2.2.5.2 Bestimmung der Startwerte	36
2.2.5.3 Konvergenzuntersuchung und Fehlerabschätzung	37
2.2.5.4 Anwendungsbeispiel	38
2.2.6 Konvergenzordnung eines Iterationsverfahrens	39
2.2.7 Spezielle Iterationsverfahren	41
2.2.7.1 Das Newtonsche Verfahren für einfache Nullstellen	41
2.2.7.2 Das Newtonsche Verfahren für mehrfache Nullstellen	46

	Seite
2.2.7.3 Regula falsi für einfache und mehrfache Nullstellen	51
2.2.7.4 Das Verfahren von Steffensen für einfache und mehrfache Nullstellen	53
2.2.7.5 Das Pegasus-Verfahren	56
2.2.7.6 Entscheidungshilfen	57
2.2.8 Praxisbeispiele	58
2.3 Verfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen	63
2.3.1 Vorbemerkungen	63
2.3.2 Das Horner-Schema für algebraische Polynome	64
2.3.2.1 Das einfache Horner-Schema	64
2.3.2.2 Das doppelreihige Horner-Schema für konjugiert komplexe Argumentwerte	66
2.3.2.3 Das vollständige Horner-Schema	68
2.3.2.4 Anwendungen	70
2.3.3 Bemerkungen zur Bestimmung sämtlicher Lösungen einer algebraischen Gleichung mit Hilfe von Iterationsverfahren	71
2.3.4 Direkte Methoden zur Lösung algebraischer Gleichungen	73
2.3.4.1 Der QD-Algorithmus	73
2.3.4.2 Das Graeffe-Verfahren	73
2.3.4.3 Das Verfahren von Muller	73
2.3.4.4 Das Verfahren von Bauhuber	82
2.3.4.5 Das Verfahren von Jenkins und Traub	84
2.4 Entscheidungshilfen	84
3. Verfahren zur numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme	86
3.1 Vorbemerkungen und Motivation	86
3.2 Aufgabenstellung und theoretische Betrachtung	94
3.3 Der Gaußsche Algorithmus	96
3.3.1 Prinzip	96
3.3.2 Konstruktion des Verfahrens	97
3.3.3 Gaußscher Algorithmus als Dreieckszerlegung	101
3.3.4 Gaußscher Algorithmus für $m$ Systeme mit gleicher Matrix	103
3.3.5 Beispiele	104
3.3.6 Matrizeninversion mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus	110

	Seite
3.4 Das Gauß-Jordan-Verfahren	111
3.5 Das Verfahren von Cholesky	113
3.6 Gleichungssysteme mit tridiagonalen Matrizen	116
3.7 Gleichungssysteme mit zyklisch tridiagonalen Matrizen	118
3.8 Gleichungssysteme mit Bandmatrizen	121
3.9 Bestimmung der zu einer Matrix inversen Matrix mit dem Austauschverfahren	121
3.10 Fehler, Kondition und Nachiteration	126
3.10.1 Fehler und Kondition	126
3.10.2 Nachiteration	131
3.11 Gleichungssysteme mit Blockmatrizen	133
3.12 Iterationsverfahren	138
3.12.1 Vorbemerkungen	138
3.12.2 Das Iterationsverfahren in Gesamtschritten	139
3.12.2.1 Konstruktion des Verfahrens	139
3.12.2.2 Konvergenz und Fehlerabschätzung	142
3.12.3 Das Iterationsverfahren in Einzelschritten oder das Gauß-Seidelsche Iterationsverfahren	150
3.13 Entscheidungshilfen für die Auswahl des Verfahrens	152
4. Systeme nichtlinearer Gleichungen	155
4.1 Problemstellung und Anwendungsbeispiele	155
4.2 Allgemeines Iterationsverfahren	159
4.3 Spezielle Iterationsverfahren	165
4.3.1 Das quadratisch-konvergente Newton-Verfahren	165
4.3.2 Primitivform des Newton-Verfahrens	169
4.3.3 Gedämpftes Newton-Verfahren	170
4.3.4 Das Verfahren des stärksten Abstiegs	170
4.3.5 Weitere Verfahren	174
5. Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	175
5.1 Definitionen und Aufgabenstellungen	175
5.2 Diagonalähnliche Matrizen	176

5.3	Das Iterationsverfahren nach v. Mises zur Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes und des zugehörigen Eigenvektors	179
5.4	Bestimmung des betragskleinsten Eigenwertes mit dem Iterationsverfahren nach v. Mises	189
5.5	Konvergenzverbesserung mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten im Falle hermitescher Matrizen	190
5.6	Bestimmung weiterer Eigenwerte und Eigenvektoren nach dem Iterationsverfahren von v. Mises	192
5.7	Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix nach den Verfahren von Martin, Parlett, Peters, Reinsch, Wilkinson	194
5.8	Zusammenstellung weiterer Verfahren	196
6.	Approximation stetiger Funktionen	197
6.1	Einführung und Motivation	197
6.2	Approximationsaufgabe und beste Approximation	200
6.3	Approximation im quadratischen Mittel	204
6.3.1	Kontinuierliche Fehlerquadratmethode von Gauß	204
6.3.2	Diskrete Fehlerquadratmethode von Gauß	209
6.4	Approximation von Polynomen durch Tschebyscheff-Polynome	215
6.4.1	Vorbemerkung	215
6.4.2	Beste gleichmäßige Approximation. Definition	216
6.4.3	Approximation durch Tschebyscheff-Polynome	218
6.4.3.1	Einführung in die Tschebyscheff-Polynome	218
6.4.3.2	Darstellung von Polynomen als Linearkombination von Tschebyscheff-Polynomen	219
6.4.3.3	Beste gleichmäßige Approximation	221
6.4.3.4	Gleichmäßige Approximation	222
6.5	Approximation periodischer Funktionen	227
6.5.1	Vorbemerkungen	227
6.5.2	Approximation im quadratischen Mittel	227
6.5.3	Trigonometrische Interpolation	228
6.5.4	Komplexe diskrete Fouriertransformation	233
7.	Interpolation durch algebraische Polynome und Splines	236
7.1	Aufgabenstellung, Existenz und Eindeutigkeit der Interpolation	236

7.2 Interpolationsformel von Lagrange	238
7.2.1 Formel für beliebige Stützstellen	238
7.2.2 Formel für äquidistante Stützstellen	241
7.2.3 Restglied der Interpolation. Konvergenz	242
7.3 Das Interpolationsschema von Aitken für beliebige Stützstellen	245
7.4 Inverse Interpolation nach Aitken	250
7.5 Interpolationsformeln von Newton	252
7.5.1 Formel für beliebige Stützstellen	252
7.5.2 Formel für äquidistante Stützstellen	255
7.6 Interpolationsformeln für äquidistante Stützstellen mit Hilfe des Frazerdiagramms	256
7.7 Zur Abschätzung des Interpolationsfehlers	267
7.8 Entscheidungshilfen für die zweckmäßige Auswahl der verschiedenen Interpolationsformeln	268
7.9 Weitere Interpolationsarten	270
7.10 Interpolierende Polynom-Splines dritten Grades	272
7.10.1 Einführung und Motivation	272
7.10.2 Definition der Splinefunktionen	277
7.10.3 Berechnung der interpolierenden kubischen Splinefunktionen	281
7.10.4 Übersicht über die Eignung kubischer Spline-Arten zur Darstellung verschiedener Kurventypen	294
7.10.5 Kombinierte interpolierende Polynomsplines	296
7.10.6 Verallgemein. Spline-Funktionen dritten Grades	301
7.11 Hermite-Splines fünften Grades	302
7.12 Polynomiale Ausgleichssplines dritten Grades	313
7.13 Interpolation bei Funktionen mehrerer Veränderlichen	321
7.13.1 Interpolationsformel von Lagrange	321
7.13.2 Zweidimensionale Polynom-Splines dritten Grades	323
7.14 Kubische und bikubische Bézier-Splines	332
7.14.1 Kubische Bézier-Splines	333
7.14.2 Bikubische Bézier-Splines	339
7.15 Entscheidungshilfen bei der Auswahl des zweckmäßigsten Verfahrens zur angenäherten Darstellung einer stetigen Funktion bzw. einer glatten Fläche	348

	Seite
8. Numerische Differentiation	353
8.1 Vorbemerkungen und Motivation	353
8.2 Näherungsweise Differentiation mit Hilfe eines Interpolationspolynoms	353
8.3 Näherungsweise Differentiation mit Hilfe kubischer Splines	355
8.4 Numerische Differentiation nach dem Romberg-Verfahren	357
8.5 Entscheidungshilfen bei der Auswahl des Verfahrens	361
9. Numerische Quadratur	363
9.1 Vorbemerkungen und Motivation	363
9.2 Interpolationsquadraturformeln	366
9.2.1 Konstruktionsmethoden	366
9.2.2 Newton-Cotes-Formeln	370
9.2.2.1 Sehnentrapezformel	371
9.2.2.2 Simpsonsche Formel	374
9.2.2.3 Die 3/8-Formel	378
9.2.2.4 Zusammenstellung von Newton-Cotes-Formeln	381
9.2.3 Quadraturformeln von Maclaurin	383
9.2.3.1 Die Tangententrapezformel	383
9.2.3.2 Zusammenstellung von Maclaurin-Formeln	385
9.2.4 Die Euler-Maclaurin-Formeln	386
9.2.5 Fehlerschätzungsformeln	388
9.3 Tschebyscheffsche Quadraturformeln	392
9.4 Quadraturformeln von Gauß	394
9.5 Das Verfahren von Romberg	399
9.6 Konvergenz der Quadraturformeln	404
9.7 Entscheidungshilfen für die Auswahl des Verfahrens	405
10. Numerische Verfahren für die Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung	407
10.1 Vorbemerkungen und Motivation	407
10.2 Prinzip und Einteilung der numerischen Verfahren	408
10.3 Einschrittverfahren	409
10.3.1 Das Polygonzugverfahren von Euler-Cauchy	409
10.3.2 Das implizite Euler-Cauchy-Verfahren	414

10.3.3	Das Verfahren von Heun (Praediktor-Korrektor-Verfahren)	415
10.3.4	Runge-Kutta-Verfahren	419
10.3.4.1	Allgemeiner Ansatz	419
10.3.4.2	Beschreibung des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens	421
10.3.4.3	Die expliziten Runge-Kutta-Verfahren nach Gill und Fehlberg	426
10.3.5	Fehlerschätzungsformeln	430
10.3.6	Verfahrensfunktion eines Einschrittverfahrens. Konsistenz	432
10.3.7	Implizite Runge-Kutta-Verfahren	433
10.3.7.1	Vollimplizite Runge-Kutta-Verfahren	433
10.3.7.2	Halbimplizite Runge-Kutta-Verfahren	435
10.4	Mehrschrittverfahren	436
10.4.1	Prinzip der Mehrschrittverfahren	436
10.4.2	Das explizite Verfahren von Adams-Bashforth	437
10.4.3	Das Praediktor-Korrektor-Verfahren von Adams-Moulton	442
10.4.3.1	Konstruktion des Verfahrens	442
10.4.3.2	Fehlerabschätzung und Fehlerschätzung	447
10.5	Extrapolationsverfahren von Bulirsch, Stoer, Gragg	449
10.6	Stabilität und Konvergenz	453
10.6.1	Vorbemerkungen, Einführung. Konvergenz	453
10.6.2	Stabilität der Differentialgleichung	454
10.6.3	Stabilität des numerischen Verfahrens	454
10.7	Entscheidungshilfen bei der Wahl des Verfahrens	461
11.	Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme bei Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und bei Differentialgleichungen höherer Ordnung	462
11.1	Runge-Kutta-Verfahren	464
11.1.1	Allgemeiner Ansatz	464
11.1.2	Das klassische Runge-Kutta-Verfahren	464
11.1.3	Runge-Kutta-Verfahren für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung	469
11.1.4	Schrittweitensteuerung	470

	Seite
11.2 Mehrschrittverfahren	471
11.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung	474
11.4 Steife Differentialgleichungssysteme	478
11.4.1 Problemstellung und Motivation	478
11.4.2 Kriterien für Steifheit eines Systems	480
11.4.3 Das Verfahren von Gear zur Integration steifer Systeme	483
11.4.4 Verfahren von Enright für steife Systeme	491
11.5 Entscheidungshilfen für die Auswahl des Verfahrens	492
Beispielverzeichnis	498
Literaturverzeichnis	499
Sachregister	519