

# Table des Matières

0	Introduction générale . . . . .	1
0.1	Généralités sur l'optimisation . . . . .	1
0.1.1	Le problème . . . . .	1
0.1.2	Classification . . . . .	2
0.2	Motivation et Exemples . . . . .	2
0.2.1	Biologie moléculaire . . . . .	3
0.2.2	Météorologie . . . . .	4
0.2.3	Trajectoire d'un objet sous-marin . . . . .	5
0.2.4	Optimisation de la production . . . . .	6
0.3	Principe général de résolution . . . . .	7
0.4	Théorème général de convergence: Zangwill . . . . .	9
0.5	Généralités sur la convergence . . . . .	10
<b>I</b>	<b>Problèmes sans contraintes</b>	<b>15</b>
1	Méthodes de base . . . . .	17
1.1	Questions d'existence . . . . .	17
1.2	Conditions d'optimalité . . . . .	17
1.3	Méthodes du premier ordre . . . . .	19
1.3.1	Gauss-Seidel . . . . .	19
1.3.2	Méthode des approximations successives ou du gradient . . . . .	19
1.4	Lien avec le schéma général de descente . . . . .	20
1.4.1	Choix de la norme $\ell_1$ . . . . .	20
1.4.2	Choix de la norme $\ell_2$ . . . . .	21
1.5	Méthode de plus profonde descente . . . . .	21
1.6	Implémentation . . . . .	24
2	Recherches linéaires . . . . .	27
2.1	Schéma général . . . . .	27
2.2	Calcul du nouveau $t$ . . . . .	29
2.3	Recherche d'un pas optimal (pour mémoire) . . . . .	31
2.4	Recherche moderne: la règle de Wolfe . . . . .	33
2.5	Autres règles: Goldstein et Price, Arnijo . . . . .	36
2.5.1	Règle de Goldstein et Price . . . . .	36
2.5.2	Règle d'Arnijo . . . . .	36
2.5.3	Remarque sur le choix des constantes . . . . .	37

2.6	Considérations informatiques . . . . .	38
3	Méthodes Newtoniennes . . . . .	41
3.1	Préliminaires . . . . .	41
3.2	Forcer la convergence globale . . . . .	42
3.3	Allègement de la méthode . . . . .	43
3.4	Les Méthodes de quasi-Newton . . . . .	44
3.5	Convergence globale . . . . .	46
3.6	Convergence locale: Généralités . . . . .	49
3.7	Convergence locale: BFGS . . . . .	50
4	Gradient Conjugué . . . . .	55
4.1	Principe du gradient conjugué . . . . .	55
4.2	Développement de la méthode . . . . .	57
4.3	Calcul de la direction . . . . .	57
4.4	L'algorithme vu comme procédé d'orthogonalisation . . . . .	58
4.5	Application aux fonctions non quadratiques . . . . .	60
4.6	Relation avec quasi-Newton . . . . .	62
5	Méthodes spéciales . . . . .	65
5.1	Régions de confiance . . . . .	65
5.1.1	Le problème élémentaire . . . . .	66
5.1.2	Le mécanisme élémentaire: recherche curviligne . . . . .	67
5.1.3	Incidence sur la suite $x_k$ . . . . .	68
5.2	Problèmes de moindres carrés: Gauss-Newton . . . . .	70
5.3	Problèmes de grande taille: quasi-Newton à mémoire limitée . . . . .	72
5.4	Newton tronqué . . . . .	74
<b>II Optimisation non différentiable</b>		<b>77</b>
6	Introduction à l'optimisation non différentiable . . . . .	79
6.1	Quelques rappels d'analyse convexe . . . . .	79
6.2	Pourquoi des méthodes spéciales? . . . . .	81
6.3	Méthodes de descente . . . . .	81
6.3.1	Méthode de plus forte pente . . . . .	82
6.3.2	Stabilisation. Une approche duale . . . . .	85
6.4	Méthodes de boîte noire . . . . .	86
6.4.1	Méthodes de sous-gradient . . . . .	87
6.4.2	Méthode de plans sécants . . . . .	88
7	Méthodes de faisceaux . . . . .	93
7.1	Stabilisation. Une approche primale . . . . .	93
7.2	Quelques exemples de problèmes stabilisés . . . . .	95
7.3	Méthodes de faisceaux pénalisées . . . . .	96
7.3.1	Une variante duale . . . . .	97
7.3.2	Gestion du faisceau. Agrégation . . . . .	100
7.3.3	Convergence . . . . .	102

8	Décomposition et dualité . . . . .	107
8.1	Un voyage dans l'espace dual . . . . .	108
8.1.1	Régularité de la fonction duale . . . . .	109
8.1.2	Existence de solutions duales . . . . .	110
8.2	De retour au primal . . . . .	111
8.3	Décomposition par les prix . . . . .	114
8.3.1	Décomposition de Dantzig-Wolfe . . . . .	115
8.4	Décomposition par les ressources . . . . .	117
8.5	Autres techniques de décomposition . . . . .	118
<b>III Méthodes newtoniennes en optimisation avec contraintes</b>		<b>121</b>
9	Rappels . . . . .	125
9.1	Calcul différentiel . . . . .	125
9.2	Existence et unicité des solutions . . . . .	126
9.3	Conditions d'optimalité du premier ordre . . . . .	127
9.4	Conditions d'optimalité du second ordre . . . . .	128
9.5	Vitesses de convergence . . . . .	129
9.6	Projection sur un convexe fermé . . . . .	130
9.7	La méthode de Newton . . . . .	131
10	Méthodes locales pour problèmes avec contraintes d'égalité . . . . .	133
10.1	Décompositions de $\mathbb{R}^n$ adaptées . . . . .	133
10.2	Méthode de Newton . . . . .	137
10.3	Méthode du hessien réduit . . . . .	144
10.4	Comparaison des algorithmes . . . . .	149
11	Méthodes locales pour problèmes avec contraintes d'inégalité . . . . .	151
11.1	La programmation quadratique successive . . . . .	151
11.2	Convergence quadratique primale-duale . . . . .	153
11.3	Convergence superlinéaire primale . . . . .	155
12	Pénalisation exacte . . . . .	159
12.1	Vue d'ensemble . . . . .	159
12.2	Le lagrangien . . . . .	161
12.3	Le lagrangien augmenté . . . . .	162
12.4	Pénalisation de Han . . . . .	165
13	Globalisation par recherche linéaire . . . . .	171
13.1	Schéma de l'algorithme . . . . .	171
13.2	Décroissance de $\Theta_\sigma$ le long de $d_k$ . . . . .	172
13.3	Convergence globale . . . . .	175
13.4	Du global au local . . . . .	177

14 Versions quasi-newtoniennes . . . . .	183
14.1 Principes . . . . .	183
14.2 PQS quasi-newtonienne . . . . .	186
14.3 Méthode de quasi-Newton réduite . . . . .	190
Pour en savoir plus . . . . .	197
Notes bibliographiques . . . . .	199
Exercices . . . . .	201
<b>IV Algorithmes de points intérieurs pour l'optimisation linéaire et quadratique</b>	<b>203</b>
15 Optimisation sous contraintes linéaires et algorithme du simplexe . . . . .	209
15.1 Existence de solutions . . . . .	209
15.1.1 Résultat d'existence . . . . .	209
15.1.2 Points basiques et extensions . . . . .	211
15.2 Dualité . . . . .	212
15.2.1 Introduction du problème dual . . . . .	212
15.2.2 Notion de point-selle . . . . .	214
15.2.3 Autres formulations . . . . .	217
15.2.4 Complémentarité stricte . . . . .	218
15.3 Algorithme du simplexe . . . . .	219
15.3.1 Calcul de la direction de descente . . . . .	219
15.3.2 Énoncé de l'algorithme . . . . .	220
15.4 Notes . . . . .	222
16 Complémentarité linéaire monotone et champs de vecteurs associés . . . . .	225
16.1 Pénalisation logarithmique et trajectoire centrale . . . . .	225
16.1.1 Pénalisation logarithmique . . . . .	225
16.1.2 Trajectoire centrale . . . . .	226
16.2 Complémentarité linéaire monotone . . . . .	227
16.2.1 Cadre général . . . . .	227
16.2.2 Un groupe de transformations . . . . .	230
16.2.3 Forme standard . . . . .	231
16.2.4 Partitionnement des variables. Forme canonique . . . . .	232
16.2.5 Ordres de grandeur au voisinage de la trajectoire centrale . . . . .	232
16.3 Champs de vecteurs associés à la trajectoire centrale . . . . .	234
16.3.1 Cadre général . . . . .	234
16.3.2 Mise à l'échelle du problème . . . . .	235
16.3.3 Analyse des directions . . . . .	236
16.3.4 Champ modifié . . . . .	239
16.4 Trajectoires continues . . . . .	241
16.4.1 Points limites des trajectoires continues . . . . .	241
16.4.2 Développement des trajectoires affines et directions affines . . . . .	243
16.4.3 Le lemme de Mizuno . . . . .	244
16.5 Notes . . . . .	245

17	Algorithmes prédicteurs correcteurs . . . . .	247
17.1	Vue d'ensemble . . . . .	247
17.2	Exposé des méthodes . . . . .	247
17.2.1	Cadre général des algorithmes primaux-duaux . . . . .	247
17.2.2	Pondération après déplacement . . . . .	249
17.2.3	La méthode prédicteur correcteur . . . . .	249
17.3	Un algorithme de petits voisinages . . . . .	250
17.3.1	Enoncé de l'algorithme. Résultat principal . . . . .	250
17.3.2	Analyse du déplacement de centralisation . . . . .	250
17.3.3	Analyse du pas affine et convergence globale . . . . .	251
17.3.4	Vitesse asymptotique . . . . .	253
17.4	Un algorithme prédicteur correcteur avec champ modifié . . . . .	253
17.4.1	Principe . . . . .	253
17.4.2	Enoncé de l'algorithme. Résultat principal . . . . .	255
17.4.3	Analyse de complexité . . . . .	256
17.4.4	Analyse asymptotique . . . . .	256
17.5	Un algorithme de grands voisinages . . . . .	257
17.5.1	Enoncé de l'algorithme. Résultat principal . . . . .	257
17.5.2	Analyse du déplacement de centralisation . . . . .	258
17.5.3	Analyse du déplacement affine . . . . .	259
17.5.4	Convergence asymptotique . . . . .	259
17.6	Aspects pratiques . . . . .	259
17.7	Notes . . . . .	260
18	Algorithmes non réalisables . . . . .	261
18.1	Vue d'ensemble . . . . .	261
18.2	Principe du suivi de chemin non réalisable . . . . .	261
18.2.1	Trajectoire centrale non réalisable . . . . .	261
18.2.2	Directions de déplacement . . . . .	262
18.2.3	Ordres de grandeur des points approximativement centrés . . . . .	263
18.2.4	Analyse des directions . . . . .	265
18.2.5	Champ modifié . . . . .	267
18.3	Algorithme prédicteur correcteur non réalisable . . . . .	268
18.3.1	Analyse de complexité . . . . .	269
18.3.2	Analyse asymptotique . . . . .	271
18.4	Notes . . . . .	272
19	Autodualité . . . . .	273
19.1	Vue d'ensemble . . . . .	273
19.2	Problèmes linéaires avec contraintes d'inégalité . . . . .	273
19.2.1	Une famille de problèmes linéaires autoduaux . . . . .	273
19.2.2	Plongement dans un problème autodual . . . . .	275
19.3	Problèmes linéaires sous forme standard . . . . .	277
19.3.1	Le système homogène autodual associé . . . . .	277
19.3.2	Plongement dans un problème autodual réalisable . . . . .	278
19.4	Aspects pratiques . . . . .	279
19.5	Extension aux problèmes de complémentarité linéaire monotone . . . . .	280
19.6	Notes . . . . .	282

20	Méthodes à un pas	283
20.1	Vue d'ensemble	283
20.2	La méthode de plus grand pas	284
20.2.1	Algorithme de plus grand pas	284
20.2.2	Algorithme de plus grand pas avec sauvegarde	284
20.3	Centralisation dans l'espace des grandes variables	285
20.3.1	Distance d'un seul côté	285
20.3.2	Convergence en présence de stricte complémentarité	289
20.3.3	Convergence en l'absence de stricte complémentarité	290
20.3.4	Distance relative dans l'espace des grandes variables	291
20.4	Analyse de convergence des algorithmes	292
20.4.1	Convergence globale de l'algorithme de plus grand pas	292
20.4.2	Convergence locale de l'algorithme de plus grand pas	293
20.4.3	Convergence de l'algorithme de plus grand pas avec sauvegarde	294
20.5	Notes	297
21	Complexité de problèmes d'optimisation linéaire à données entières	299
21.1	Vue d'ensemble	299
21.2	Résultats principaux	300
21.2.1	Hypothèses générales	300
21.2.2	Enoncé des résultats	300
21.2.3	Application	300
21.3	Solution d'un système d'équations linéaires	301
21.4	Démonstration des résultats principaux	302
21.4.1	Démonstration du théorème 21.1	302
21.4.2	Démonstration du théorème 21.2	303
21.5	Notes	303
22	Algorithme de Karmarkar	305
22.1	Vue d'ensemble	305
22.2	Le problème linéaire sous forme projective	305
22.2.1	Forme projective et potentiel de Karmarkar	305
22.2.2	Minimisation du potentiel et résolution de ( <i>PLP</i> )	306
22.3	Enoncé de l'algorithme de Karmarkar	307
22.4	Analyse de l'algorithme	308
22.4.1	Analyse de complexité	308
22.4.2	Analyse de la diminution du potentiel	308
22.4.3	Estimation du coût optimal	309
22.4.4	Aspects pratiques	310
22.5	Notes	310
	Bibliographie	311
	Index	321