

Inhalt

1 Einführung in die Algebra der Matrizen	1
11 Definition der Matrix, Sonderformen und Bezeichnungen	1
11.1 Matrix	1
11.2 Bezeichnungen	2
11.3 Transponierte Matrix	2
11.4 Überschaubarkeit der Formeln	2
11.5 Determinante	3
11.6 Diagonale und Spur	3
11.7 Aufteilung in Spalten	4
12 Rechenregeln	4
12.1 Addition, Subtraktion	4
12.2 Multiplikation	4
12.3 Summenproben	5
12.4 Lineare Funktionen und Gleichungen	6
12.5 Zweckmäßige Anordnung der Faktoren	6
12.6 Übungen zur Multiplikation	7
13 Inversion der Matrizen	8
13.1 Definition	8
13.2 Determinantenformel	9
13.3 Einfache Inversion bei Sonderformen	9
13.4 Inversion symmetrischer Matrizen	10
13.41 Algorithmus von CHOLESKY mit Inversion	
13.42 Moderner GAUSScher Algorithmus mit Inversion	
13.5 Lineare Gleichungen mit nichtsymmetrischer Koeffizientenmatrix	15
13.6 Matrizeninversion durch Reihenentwicklung	19
13.61 Formeln	
13.62 Anwendungen	
13.63 Nachiteration	
13.7 Fehlersuche, Fehlerberichtigung	20
13.8 Wissenswertes	20
13.9 Übungen	21
14 Submatrizen	22
14.1 Erklärung	22
14.2 Vorteile bei numerischen Rechnungen	23
14.3 Übungen	23

15	Lineare Transformationen	24
15.1	Transformation als Abbildung	24
15.2	Orthogonale Transformation	24
15.21	Orthogonale und orthonormale Matrizen	
15.22	Ebene Transformation	
15.23	Räumliche Transformation	
15.24	Rotationsmatrizen	
16	Differentiation von Matrizenfunktionen	27
16.1	Differentialenvektor und totales Differential	27
16.2	Regeln zur Differentiation linearer und quadratischer Matrizenfunktionen	28
16.3	Extremwert der allgemeinen Gleichung 2. Grades	28
16.4	Übung	28
17	Rang der Matrix	29
17.1	Rangdefekt.	29
17.2	Weitere Bezeichnungen	29
17.3	Rang bei Matrizenprodukten	30
17.4	Nullteiler	30
17.5	Bestimmung des Rangs einer Matrix	31
17.51	Quadratische Matrix	
17.52	Hohe Matrix	
18	Positiv definite Form	32
18.1	Definition und Bezeichnungen	32
18.2	Unterscheidung eigentlich definit und semidefinit	32
18.3	und 18.4 Definitheit bei reell symmetrischen Produkten	32
18.5	Bestimmung der Definitheit	33
19	Eigenwert, Eigenvektoren	33
19.1	Das Eigenwertproblem	33
19.2	Spektralmatrix und Modalmatrix	34
19.3	Beispiel	34
19.4	Weitere Zusammenhänge	34
19.5	Beispiel	35
19.6	Übung	36
19.7	Kondition	36
19.71	Ursachen schlechter Kondition	
19.72	TODDsche Zahl	
19.73	Abschätzung nach TRENCOV	
19.74	Abhilfe durch GAUSSsche Transformation	
19.75	Kondition bei asymmetrischen Matrizen	

Inhalt	IX
19.8 Pseudoinverse	37
19.9 Idempotenz und Tripotenz	40
2 Fehlerlehre	41
21 Fehlerarten und Begriffe	41
21.1 Ungenauigkeiten	41
21.11 Meßfehler	
21.12 Genauigkeitsmaße	
21.13 Grobe Fehler	
21.2 Elementarfehler	41
21.3 Systematische Fehler	42
21.4 Zufällige Fehler	42
21.5 Korrelierte Beobachtungen	43
21.6 Wahre Fehler und Residuen	43
22 Genauigkeitsmaße	44
22.1 Durchschnittlicher Fehler	44
22.2 Mittlerer Fehler	45
22.3 Wahrscheinlicher Fehler	45
22.4 Fehlergrenze	45
22.5 Relativer Fehler	45
22.6 Beispiel	45
23 Korrelation.	46
23.1 Erklärung	46
23.2 Definitionen	47
23.3 Beispiel	49
24 Fehlerfortpflanzung	50
24.1 Lineare Funktionen. Ableitung	50
24.2 Lineare Funktionen. Beispiel	51
24.3 Nichtlineare Funktionen. Ableitung	51
24.4 Nichtlineare Funktionen. Beispiel	52
24.5 Sonderfälle beim Linearisieren	53
24.6 Linearisieren durch numerisches Differenzieren	54
24.7 Beispiel	55
25 Mittlerer Fehler	55
25.1 Berechnung aus Residuen	55
25.2 Mittlerer Fehler des einfachen Mittels	56
25.3 Beispiel	57
25.4 Mittlerer Fehler aus Doppelmessungen.	57
25.5 Beispiel	58

26	Gewicht und Kofaktor	58
26.1	Gewogenes Mittel	58
26.2	Kofaktoren	59
26.3	Allgemeines Fortpflanzungsgesetz der Kofaktoren	60
26.4	Fehlerfortpflanzung in Funktionen von Funktionen	61
27	Zufallsgrößen, Dichtefunktion, Verteilungsfunktion	61
27.1	Kontinuierliche Verteilungen	61
27.2	Das GAUSSsche Fehlergesetz	63
27.3	Tabellen zur Normalverteilung	65
27.4	Beispiele zum Tabellengebrauch	66
27.5	Diskrete Verteilungen	66
27.6	Die elementaren Fehlermaße in der Normalverteilung	69
	27.61 Durchschnittlicher Fehler	
	27.62 Mittlerer Fehler	
	27.63 Wahrscheinlicher Fehler	
	27.64 Risiken	
27.7	Untersuchung einer Stichprobe auf Normalverteilung	70
	27.71 Histogramm	
	27.72 Summenlinie im Wahrscheinlichkeitspapier	
28	Mehrdimensionale Verteilungen	72
28.1	Das Bivariat in Normalverteilung	72
28.2	Das Multivariat in Normalverteilung	75
3	Ausgleich direkter und vermittelnder Beobachtungen	76
31	Die Methode der kleinsten Quadrate	76
31.1	Zwei Begründungen von C. F. GAUSS	76
31.2	Erweiterung auf korrelierte Beobachtungen	77
32	Ausgleich direkter Beobachtungen	78
32.1	Beobachtungsreihe für eine Unbekannte	78
	32.11 Formelableitung	
	32.12 Beispiel für das allgemeine Mittel	
	32.13 Wirkung hoher Korrelation	
32.2	Mehrfache Messung eines Vektors	81
	32.21 Problem	
	32.22 Formelableitung	
	32.23 Beispiel	

33	Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen	83
33.1	Linearisieren der Fehlergleichungen	83
33.2	Formelableitung	83
33.3	Beispiel Höhennetz	86
34	Netzverdichtung	87
34.1	Koeffizienten in Richtungs- und Streckenfehlergleichungen	87
34.2	Aufstellen der Fehlergleichungen	89
34.3	Daten für ein Beispiel zur Netzverdichtung	90
34.3.1	Ausgleichung der Strecken	
34.3.2	Ausgleichung der Richtungen	
34.4	Reduzierte Fehlergleichungen	94
34.4.1	Problem	
34.4.2	Reduzierte Gleichungen nach F. G. GAUSS mit Beispiel	
34.4.3	Elimination der Orientierungsunbekannten nach O. SCHREIBER mit Beispiel	
34.4.4	Elimination der Orientierungsunbekannten mit der reduzierten Gewichtsmatrix mit Beispiel	
34.4.5	Vergleich der 3 Reduktionsverfahren	
34.4.6	Informationsverlust bei Elimination von z	
34.5	Gemeinsame Ausgleichung von Richtungen und Strecken	98
34.5.1	Dimensionen und Gewichte	
34.5.2	Beispiel	
34.6	Stationsausgleichungen	100
34.6.1	Begründung	
34.6.2	Vollständige Richtungssätze	
34.6.3	Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze nach vermittelnden Beobachtungen	
34.6.4	Iterative Ausgleichung unvollständiger Sätze nach BESSEL	
34.7	Netzverdichtung mit korrelierten Richtungssätzen	103
34.7.1	Die reduzierende Gewichtsmatrix G . Ableitung	
34.7.2	G des stationsausgeglichenen Richtungssatzes mit Beispiel	
34.7.3	G bei Korrelation zwischen den Stationen	
34.7.4	Kovarianzmatrix der Anschlußpunkte	
34.7.5	Wiederholung der Höhenausgleichung aus 33.3	
34.7.6	Beispiel zu 34.7.2 und 34.7.4	
34.8	Genauigkeit der Punktlage	110
34.8.1	Lineare Fehlermaße	
34.8.2	Flächenhafte Fehlermaße	
34.8.3	Punktbestimmung im Raum	
34.9	Helmerts Verfahren zur Netzeinpassung	113
34.9.1	Aufgabe und Begriffe	
34.9.2	Strenge Lösung	
34.9.3	Genäherte Lösung	

35	Ausgleichungen mit singulärer N-Matrix	116
35.1	Rangdefekte	116
35.2	Datumsdefekt	116
35.3	Konfigurationsdefekt	117
35.4	Zwangsfreie Ausgleichung eines Lagenetzes	117
35.5	Streckennetz Sattenhausen	120
	35.51 Ausgleichung mit acht freien Netzpunkten	
	35.52 Ausgleichung mit regulärer N-Matrix	
	35.53 Nachträgliche Transformation	
35.6	Stationsausgleichung bei Nachbarwinkelmessung	123
36	Vermittelnde Beobachtungen mit gemessenen Unbekannten oder Bedingungen zwischen den Unbekannten	125
36.1	Zusammenfassen direkter und vermittelnder Beobachtungen	125
36.2	Ausgleichung eines Schwerenetzes	126
36.3	Bedingungen zwischen den Unbekannten	127
36.4	Ausgleichung in zwei Stufen	129
36.5	Stationsausgleichung zur Winkelmessung in der Sektorenmethode	130
36.6	Netzverbesserung durch zusätzliche Messungen	132
37	Einige Ergänzungen	134
37.1	Probe für die Gewichtsreziproken der ausgeglichenen Beobachtungen	134
37.2	Nachträgliches Einbeziehen zusätzlicher Messungen in eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen	134
37.3	Ausgleichung ohne Normalgleichungen	135
37.4	Funktionales und stochastisches Modell	137
37.5	Direkte Berechnung der Residuen	137
4	Ausgleichung bedingter Beobachtungen	139
41	Bedingungsgleichungen, Widersprüche	139
41.1	Gang der Ausgleichung	139
41.2	Mehrere Bedingungen	140
41.3	Nichtlineare Bedingungen	141
42	Ausgleichung mit mehreren Bedingungen	142
42.1	Formelableitung	142
42.2	Ausgleichung eines freien Nivellementsnetzes	144
42.3	Ausgleichung angeschlossener Nivellements	146
42.4	Bedingungsgleichungen in freien Richtungsnetzen	146
	42.41 Winkelsummenbedingungen, Sinusbedingungen	
	42.42 Abzählformeln	
42.5	Angeschlossene Richtungsnetze	149

42.6	Numerische Behandlung von Sinusbedingungen	150
42.7	Ausgleichung eines Vierecks mit kreuzenden Diagonalen	151
43	Ausgleichung ohne Normalgleichungen	152
43.1	Orthogonale Bedingungsgleichungen.	152
43.2	Orthogonalisierung der Bedingungsgleichungen mit Beispiel.	153
43.3	Iterative Nivellementsausgleichung nach GAUSS-VOGLER	154
43.4	Stationsausgleichung bei der Schweizer Sektorenmethode nach BAESCHLIN	158
44	Bedingungsgleichungen mit Unbekannten	160
44.1	Problem	160
44.2	Formelableitung	160
44.3	Fehlerrechnungen	161
44.4	Azimitbestimmung nach SODANO	163
44.5	Ausgleichungsalgorithmus der Photogrammetrie.	164
44.6	Beispiel	167
5	Ausgewählte Aufgaben der Ausgleichsrechnung	170
51	Große Dreiecksnetze	170
51.1	Additionstheorem der reduzierten Normalgleichungen	170
51.2	Probleme der Netzabgrenzung	173
52	Einfluß vernachlässigter Korrelationen	174
53	Ausgleichende Funktionen	175
53.1	Die Aufgabe	175
53.2	Ausgleichende Gerade und Regressionsgerade	175
53.3	Ausgleichende Sinuslinie	177
53.4	Willkürliche Funktionen	178
53.41	Polynom mit ganzzahligen Exponenten	
53.42	FOURIER-Reihe	
53.5	Multiple Abhängigkeiten	179
6	Einige Anwendungen der mathematischen Statistik	180
61	Verteilungsquantilen und Vertrauensbereiche	180
62	t-Verteilung, t-Quantilen und Vertrauensbereich für den Erwartungswert	182
62.1	t-Verteilung	182
62.2	Quantilen der t-Verteilung	813
62.3	Vertrauensbereich für den Erwartungswert, wenn σ nicht gegeben ist	183

63	χ^2 -Verteilung und Vertrauensbereich für σ	184
63.1	χ^2 -Verteilung	184
63.2	Quantilen der χ^2 -Verteilung	185
63.3	Vertrauensbereich für σ	186
64	Signifikanztest	186
64.1	Problem	186
64.2	Verstärken eines Signifikanzbeweises	188
64.3	Risiken und Macht des Testes	188
65	Teste zu Varianzen und Kovarianzen	190
65.1	F-Verteilung	190
65.2	Quantilen der F-Verteilung	190
65.3	Vergleich empirischer Varianzen	191
65.4	BARTLETTs Homogenitätstest	192
65.5	Verteilung des Korrelationskoeffizienten	193
65.6	Vertrauensbereich und Signifikanztest für den Korrelationskoeffizienten	193
66	Signifikanzteste für die Differenzen zweier Zufallsgrößen	194
66.1	Vergleich zweier empirischer Mittelwerte bei gleicher Varianz der Beobachtungen	194
66.2	Vergleich zweier empirischer Mittelwerte bei ungleicher Varianz der Beobachtungen	195
66.3	Vergleich zweier unabhängig ausgeglichener Werte eines Parameters	196
67	Prüfung von Verteilungen	196
67.1	χ^2 -Anpassungstest nach K. PEARSON	196
67.2	χ^2 -Anpassungstest nach MANN und WALD	198
67.3	Anpassungstest der empirischen Summenfunktion nach KOLMOGOROW und SMIRNOW	199
67.4	Spezielle Prüfungsverfahren zur Normalverteilung	200
	67.41 Zentrale Momente	
	67.42 Signifikanztest für Schiefe und Exzeß	
	67.43 Residuentest	
7	Mathematische Modelle für empirische Erkenntnisse	203
71	Regressionsanalysen	203
71.1	Regressionskoeffizient	203
71.2	Regression im normalverteilten Bivariat	203
71.3	Partielle Korrelation	206
71.4	Multiple Regression	207

72 Kollokation 210

 72.1 Begriffe 211

 72.2 Beobachtungsgleichungen 211

 72.3 Formelableitung 212

 72.4 Voraussetzungen für sinnvolle Anwendung 213

 72.5 Kovarianzmatrix, positiv definite Funktionen 214

Anhang

 Tabelle 1: Wahrscheinlichkeitsdichte der normierten Normalverteilung . 216

 Tabelle 2: Verteilungsfunktion der normierten Normalverteilung 218

Literatur 221

Sachregister 225