

# Inhaltsverzeichnis

## D. Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen

Von Dr. WILLI TÖRNIG

Direktor am Zentralinstitut für Angewandte Mathematik  
der Kernforschungsanlage Jülich GmbH  
o. Professor an der Technischen Hochschule Aachen

Einleitung . . . . .	1
I. Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	2
§ 1. Einige Grundlagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . . .	2
1.1 Definitionen . . . . .	2
1.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen. Existenz und Eindeutigkeit ihrer Lösungen . . . . .	5
1.3 Abschätzungen . . . . .	12
1.4 Lineare Differentialgleichungen . . . . .	16
1.5 Geometrische Deutung der Differentialgleichungen. Reguläre und singuläre Lösungen . . . . .	17
1.6 Einhüllende ebener Kurvenscharen. Isogonale Trajektorien . . . . .	22
§ 2. Einige Integrationsmethoden für explizite Differentialgleichungen . . . . .	26
2.1 Elementar integrierbare und verwandte Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	26
2.2 Bernoullische, Riccatische und exakte Differentialgleichungen . . . . .	32
2.3 Elementar integrierbare Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	36
2.4 Lösung durch Potenzreihen . . . . .	38
§ 3. Lösung impliziter Differentialgleichungen . . . . .	41
3.1 Spezielle Gleichungen erster Ordnung. Gleichungen mit geradlinigen Isoklinen . . . . .	41
3.2 Integration durch Differentiation. Die Legendre-Transformation . . . . .	46
§ 4. Lineare Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	49
4.1 Homogene Differentialgleichungen. Einige Lösungsmethoden . . . . .	49
4.2 Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen . . . . .	56
4.3 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	59
4.4 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	64
§ 5. Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	67
5.1 Integralbasis homogener Systeme . . . . .	67
5.2 Lösung inhomogener Systeme . . . . .	68
5.3 Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	70

§ 6. Lineare Differentialgleichungen im Komplexen . . . . .	73
6.1 Definitionen. Existenzsätze . . . . .	73
6.2 Reguläre und singuläre Stellen linearer Differentialgleichungen	75
6.3 Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse . . . . .	79
§ 7. Spezielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	81
7.1 Die Gaußsche hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .	81
7.2 Die Legendresche Differentialgleichung . . . . .	85
7.3 Die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .	87
7.4 Die Besselsche Differentialgleichung . . . . .	89
§ 8. Lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten . .	91
8.1 Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	92
8.2 Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	98
§ 9. Numerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . . .	101
9.1 Vorbemerkungen. Einschrittverfahren . . . . .	102
9.2 Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	105
9.3 Mehrschrittverfahren . . . . .	109
9.4 Adams-Verfahren . . . . .	112
9.5 Zur Theorie der Verfahren . . . . .	114
9.6 Ergänzungen . . . . .	117
II. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	121
§ 10. Lineare und quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung bei zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	121
10.1 Definitionen . . . . .	121
10.2 Richtungsfeld, Charakteristiken, Integralfächen . . . . .	122
10.3 Das Anfangswertproblem . . . . .	125
§ 11. Lineare und quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung bei $n$ unabhängigen Veränderlichen . . . . .	128
11.1 Lineare homogene Differentialgleichungen . . . . .	128
11.2 Quasilineare Differentialgleichungen . . . . .	130
§ 12. Allgemeine Differentialgleichungen erster Ordnung bei zwei un- abhängigen Veränderlichen . . . . .	133
12.1 Charakteristiken, charakteristische Streifen . . . . .	133
12.2 Das Anfangswertproblem . . . . .	136
12.3 Vollständige Integrale . . . . .	137
§ 13. Allgemeine Differentialgleichungen erster Ordnung bei $n$ unabhä- ngigen Veränderlichen . . . . .	139
13.1 Charakteristiken, charakteristische Streifen, Integrale . . . . .	139
13.2 Das Anfangswertproblem . . . . .	141
13.3 Legendre-Transformation . . . . .	142
13.4 Vollständige Integrale . . . . .	144
13.5 Anwendung in der Mechanik . . . . .	146
III. Hyperbolische Differentialgleichungen . . . . .	150
§ 14. Definitionen. Klassifizierung . . . . .	150
14.1 Lineare und quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ord- nung . . . . .	150

14.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung bei zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	153
14.3	Systeme linearer und quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	155
§ 15.	Lineare und quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	160
15.1	Charakteristische Mannigfaltigkeiten . . . . .	160
15.2	Formulierung des Anfangswertproblems . . . . .	165
15.3	Normalformen halblinearer hyperbolischer Differentialgleichungen bei zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	166
15.4	Anfangswertprobleme der Differentialgleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ . . . . .	168
15.5	Abschätzung von Näherungslösungen der Differentialgleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ . . . . .	172
15.6	Legendre-Transformation . . . . .	174
15.7	Die Riemannsche Integrationsmethode . . . . .	175
§ 16.	Die Wellengleichung . . . . .	181
16.1	Die Wellengleichung im $R_n$ . . . . .	181
16.2	Anfangswertprobleme und das Anfangs-Randwertproblem der speziellen homogenen Wellengleichung im $R_1$ . . . . .	185
16.3	Das Cauchy-Problem der speziellen homogenen Wellengleichung im $R_3$ und im $R_2$ . Huygenssches Prinzip . . . . .	189
16.4	Ausstrahlungsprobleme im $R_3$ . . . . .	191
16.5	Das Cauchy-Problem der inhomogenen speziellen Wellengleichung . . . . .	192
§ 17.	Lineare und quasilineare hyperbolische Systeme erster Ordnung	195
17.1	Charakteristikentheorie bei zwei unabhängigen Veränderlichen	195
17.2	Charakteristikentheorie bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	200
17.3	Formulierung des Cauchy-Problems . . . . .	202
17.4	Zurückführung allgemeiner Anfangswertprobleme auf Anfangswertprobleme quasilinearer Systeme erster Ordnung . . . . .	203
§ 18.	Hyperbolische Differentialgleichungen in der Gasdynamik . . . . .	206
18.1	Die wirbelfreie isentropische Strömung kompressibler Medien	207
18.2	Anwendung der Legendre-Transformation . . . . .	210
18.3	Nichtisentropische Strömungen . . . . .	212
§ 19.	Numerische Lösung von Anfangswertproblemen hyperbolischer Gleichungen mit Differenzenverfahren . . . . .	214
19.1	Numerische Lösung von Anfangswertproblemen der Gleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ . . . . .	215
19.2	Numerische Charakteristikenverfahren . . . . .	223
19.3	Differenzenverfahren in Rechteckgittern zur numerischen Lösung hyperbolischer Systeme erster Ordnung bei zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	226
19.4	Differenzenverfahren zur numerischen Lösung hyperbolischer Systeme erster Ordnung bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	236

IV. Parabolische Differentialgleichungen . . . . .	239
§ 20. Lineare und quasilineare parabolische Differentialgleichungen zwei- ter Ordnung . . . . .	239
20.1 Charakteristiken, Partikulärlösungen spezieller Gleichungen .	239
20.2 Lösung von Anfangs-Randwertproblemen allgemeinerer linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	245
§ 21. Das Maximum-Minimum-Prinzip, Abschätzungen . . . . .	248
21.1 Das Maximum-Minimum-Prinzip und Folgerungen . . . . .	248
21.2 Abschätzung von Lösungen und Näherungslösungen . . . . .	249
§ 22. Anfangs- und Anfangs-Randwertprobleme der Wärmeleitungsglei- chung . . . . .	251
22.1 Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	251
22.2 Anfangs- und Anfangs-Randwertprobleme der Gleichung $u_t = A_n u$ . . . . .	253
22.3 Einfache homogene Wärmeleitprobleme für beschränkte Ge- biete . . . . .	256
22.4 Inhomogene Wärmeleitprobleme für beschränkte Gebiete . .	262
22.5 Wärmeleitprobleme für unbeschränkte Gebiete . . . . .	266
22.6 Ergänzungen . . . . .	270
§ 23. Weitere Anwendungen parabolischer Differentialgleichungen . .	272
23.1 Diffusionsprobleme . . . . .	272
23.2 Differentialgleichungen der Grenzschichttheorie . . . . .	274
23.3 Differentialgleichungen vom gemischten Typ . . . . .	276
§ 24. Numerische Lösung parabolischer Differentialgleichungen . . . .	278
24.1 Differenzapproximationen für lineare Gleichungen bei zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	278
24.2 Verfahren bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen .	286
24.3 Nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .	289
Literatur . . . . .	290

## E. Rand- und Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und Integralgleichungen\*

Von Dr. phil. LOTHAR COLLATZ

o. Professor an der Universität Hamburg  
und

Dr. rer. nat. RÜDIGER NICOLOVIUS

Wiss. Oberrat an der Universität Hamburg

Einleitung . . . . .	293
I. Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Integral- gleichungen . . . . .	294
§ 1. Lineare Randwertaufgaben . . . . .	294
1.1 Definitionen, ein allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitsatz	294
1.2 Beispiel; fehlende Randbedingungen . . . . .	295

\* Kapitel I bis III und V bis VIII sind von R. NICOLOVIUS und Kapitel IV von L. COLLATZ bearbeitet.

1.3 Die adjungierte Randwertaufgabe . . . . .	296
1.4 Selbstadjungierte Randwertaufgaben . . . . .	298
1.5 Grundlösungen . . . . .	299
1.6 Die Greensche Funktion . . . . .	300
1.7 Systeme: Definitionen und allgemeiner Satz . . . . .	302
1.8 Adjungierte und selbstadjungierte Systeme . . . . .	303
1.9 Grundlösungen und Greensche Matrix . . . . .	304
§ 2. Lineare Randwertaufgaben mit Eigenwertparametern, Singularitäten . . . . .	306
2.1 Definitionen, der Alternativsatz . . . . .	306
2.2 Die verallgemeinerte Greensche Funktion . . . . .	307
2.3 Umwandlung in Integralgleichungen . . . . .	308
2.4 Systeme mit Eigenwertparametern . . . . .	309
2.5 Singularitäten . . . . .	310
§ 3. Lineare Integralgleichungen . . . . .	311
3.1 Definitionen und Voraussetzungen . . . . .	311
3.2 Volterrasche Integralgleichungen . . . . .	312
3.3 Der Alternativsatz . . . . .	313
3.4 Die Resolvente . . . . .	313
3.5 Ausgeartete Kerne . . . . .	314
3.6 Symmetrische Kerne . . . . .	315
3.7 Fredholmsche Integralgleichungen erster Art . . . . .	317
3.8 Singuläre Integralgleichungen . . . . .	318
3.9 Systeme und mehrdimensionale Integralgleichungen . . . . .	319
§ 4. Nichtlineare Aufgaben . . . . .	320
4.1 Einführende Beispiele . . . . .	320
4.2 Ein Existenz- und Eindeigkeitssatz . . . . .	322
4.3 Ein Spezialfall zweiter Ordnung . . . . .	324
4.4 Tabelle weiterer Spezialfälle . . . . .	325
4.5 Praktische Anwendung . . . . .	328
4.6 Zurückführung auf Anfangswertaufgaben . . . . .	330
4.7 Randwertaufgaben zweiter Ordnung . . . . .	331
4.8 Weitere Methoden für Existenz- und Eindeigkeitssätze . . . . .	333
4.9 Nichtlineare Systeme . . . . .	334
4.10 Nichtlineare Integralgleichungen . . . . .	334
§ 5. Monotonieeigenschaften . . . . .	335
5.1 Definitionen . . . . .	335
5.2 Lineare Aufgaben . . . . .	336
5.3 Beispiel . . . . .	337
5.4 Existenzsätze für nichtlineare Aufgaben . . . . .	338
5.5 Beispiel . . . . .	340
5.6 Monoton zerlegbare Operatoren . . . . .	341
5.7 Extrapolation . . . . .	341
5.8 Beispiel . . . . .	343
5.9 Vergleich benachbarter Aufgaben und Greenscher Funktionen . . . . .	344
II. Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen . . . . .	345
§ 6. Elliptische Einzeldifferentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	345
6.1 Bezeichnungen, Typeneinteilung . . . . .	345

6.2	Elliptizität . . . . .	347
6.3	Sachgemäße Aufgaben . . . . .	347
6.4	Gleichmäßige Elliptizität . . . . .	349
6.5	Beziehungen zur Tensoranalysis . . . . .	350
6.6	Die Beltramischen Gleichungen . . . . .	350
6.7	Elimination der ersten Ableitungen, der Bernoulli-Ansatz . . . . .	352
6.8	Die Legendre-Transformation . . . . .	354
6.9	Hölder-Stetigkeit und Funktionenklassen . . . . .	354
§ 7.	Randbedingungen, elliptische Systeme . . . . .	355
7.1	Drei Arten von Randbedingungen . . . . .	355
7.2	Äußere Probleme und Transformation durch reziproke Radien . . . . .	357
7.3	Einzeldifferentialgleichungen und Systeme . . . . .	358
7.4	Systeme erster Ordnung . . . . .	359
§ 8.	Adjungiertheit, Greensche Formeln und Funktionen . . . . .	360
8.1	Adjungierte und selbstadjungierte Differentialoperatoren . . . . .	360
8.2	Drei Greensche Formeln . . . . .	361
8.3	Grundlösungen . . . . .	363
8.4	Die Resolvente . . . . .	364
8.5	Existenz von Grundlösungen, Levische Funktionen . . . . .	367
8.6	Existenz der Resolvente, Ergänzungen . . . . .	368
8.7	Systeme erster Ordnung . . . . .	369
§ 9.	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	369
9.1	Eindeutigkeitsätze . . . . .	369
9.2	Existenz- und Alternativsätze . . . . .	370
9.3	Verallgemeinerte und schwache Lösungen . . . . .	371
9.4	Verallgemeinerungen der Annahme der Randwerte . . . . .	372
9.5	A priori-Abschätzungen . . . . .	373
9.6	Die Variationsgleichung . . . . .	375
9.7	Existenz und Eindeutigkeit bei nichtlinearen Randwertaufgaben . . . . .	376
§ 10.	Randmaximum- und Monotoniesätze . . . . .	378
10.1	Der Randmaximumsatz bei linearen Differentialgleichungen . . . . .	378
10.2	Annäherung an ein Randmaximum . . . . .	380
10.3	Monotonie bei linearen Randwertaufgaben . . . . .	380
10.4	Quasilineare Differentialgleichungen . . . . .	382
10.5	Nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .	383
10.6	Monotonie bei einer speziellen Differentialgleichungsform . . . . .	385
III.	Potentialprobleme und andere Aufgaben der Mathematischen Physik . . . . .	385
§ 11.	Die Potentialgleichung in zwei und mehr Dimensionen . . . . .	385
11.1	Einleitung, die Greensche Funktion der Kugel . . . . .	385
11.2	Die Poissonsche Formel und der Mittelwertsatz . . . . .	387
11.3	Folgerungen . . . . .	388
11.4	Dreiteilung, das Potential einer Raumladung . . . . .	389
11.5	Das Potential einer einfachen Schicht . . . . .	390
11.6	Das Potential einer Doppelschicht . . . . .	391
§ 12.	Die Integralgleichungen der Potentialtheorie . . . . .	392
12.1	Inhomogene Differentialgleichung, die erste Randwertaufgabe . . . . .	392
12.2	Die zweite Randwertaufgabe . . . . .	393
12.3	Lösbarkeit dieser Integralgleichungen . . . . .	394

12.4 Die dritte Randwertaufgabe . . . . .	395
12.5 Transformation durch reziproke Radien . . . . .	395
12.6 Ergänzende Bemerkungen . . . . .	397
§ 13. Regularität von Randpunkten . . . . .	398
13.1 Die Kapazität, ein Regularitätskriterium . . . . .	398
13.2 Super- und subharmonische Funktionen, Ober- und Unterfunktionen . . . . .	399
13.3 Die Sperrfunktion, ein weiteres Kriterium . . . . .	400
13.4 Spezialfälle verschiedener Dimension . . . . .	400
13.5 Kriterien für einspringende Spitzen . . . . .	402
§ 14. Die Wellengleichung und die Gleichungen der Minimalflächen und der Hydrodynamik . . . . .	403
14.1 Komplexe Lösungen der Wellengleichung . . . . .	403
14.2 Ein Mittelwertsatz, die Maxwellschen Gleichungen . . . . .	404
14.3 Drei Formulierungen des Minimalflächenproblems . . . . .	404
14.4 Eigenschaften von Minimalflächen, Beispiel . . . . .	406
14.5 Die Gleichungen der Hydrodynamik und Spezialfälle . . . . .	406
14.6 Stationäre Zustände, die Grenzschichtgleichungen . . . . .	407
14.7 Das Geschwindigkeitspotential . . . . .	408
§ 15. Die Gleichungen der Elastizitätslehre . . . . .	409
15.1 Die linearen Elastizitätsgleichungen . . . . .	409
15.2 Elimination von Dehnungen oder Spannungen, Randbedingungen . . . . .	410
15.3 Die Greenschen Formeln, Grundlösungsmatrizen . . . . .	411
15.4 Torsion und ebener Spannungszustand . . . . .	412
15.5 Die Plattengleichung . . . . .	412
15.6 Die Randbedingungen der Plattenbiegung . . . . .	413
15.7 Die Greenschen Formeln und die Grundlösung der Plattenbiegung . . . . .	415
15.8 Ergänzungen . . . . .	415
IV. Eigenwertaufgaben bei Differential- und Integralgleichungen . . . . .	416
§ 16. Einige allgemeine Begriffe und Sätze . . . . .	417
16.1 Einige Typen von Eigenwertaufgaben . . . . .	417
16.1.1 Eigenwertaufgaben bei Differentialgleichungen, insbesondere bei gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . . .	418
16.1.2 Partielle Differentialgleichungen . . . . .	419
16.1.3 Weitere Typen von Eigenwertaufgaben . . . . .	420
16.1.4 Eigenwertaufgaben bei Integralgleichungen . . . . .	421
16.2 Beispiele technischer Eigenwertaufgaben . . . . .	421
16.3 Die Begriffe selbstadjungiert und volldefinit . . . . .	421
16.4 Minimaleigenschaften der Eigenwerte . . . . .	426
16.5 Der Entwicklungssatz . . . . .	430
16.6 Aus der Theorie der Eigenwerte bei Integralgleichungen . . . . .	431
16.7 Spezielle Sätze für Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Asymptotische Formeln . . . . .	434
§ 17. Iteration und Ritzsches Verfahren . . . . .	437
17.1 Schwarzsche Konstanten und Templescher Einschließungssatz . . . . .	437

17.2	Beispiele zur Durchführung des Iterationsverfahrens mit Fehlerabschätzung . . . . .	439
17.3	Quotienteneinschließungssatz . . . . .	442
17.4	Ritzsches Verfahren . . . . .	444
17.5	Beispiele zur Durchführung des Ritzschen Verfahrens . . . . .	446
17.6	Energiemethode bei Schwingungsaufgaben . . . . .	449
§ 18.	Weitere Näherungsverfahren . . . . .	450
18.1	Differenzenverfahren . . . . .	450
18.2	Kollokation . . . . .	452
18.3	Störungsrechnung . . . . .	453
18.4	Weitere Methoden . . . . .	454
18.4.1	Zusammengesetzte Systeme . . . . .	454
18.4.2	Methode der Zwischenaufgaben . . . . .	455
18.4.3	Reihenansätze . . . . .	456
18.5	Vorschläge für die Wahl des zu benutzenden Näherungsverfahrens . . . . .	457
18.5.1	Formelmäßige Lösung . . . . .	457
18.5.2	Überschlagsmethoden . . . . .	458
18.5.3	Genauere Rechnung . . . . .	458
V.	Beziehungen der Variationsrechnung . . . . .	459
§ 19.	Grundbegriffe der Variationsrechnung . . . . .	459
19.1	Die Grundaufgabe, erste und zweite Variation . . . . .	459
19.2	Das Fundamentallemma . . . . .	460
19.3	Integralgleichungen . . . . .	461
19.4	Gewöhnliche Differentialgleichungen, Einteilung der Randbedingungen . . . . .	463
19.5	Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das Hamiltonsche Prinzip . . . . .	465
19.6	Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	467
19.7	Einige Spezialfälle . . . . .	468
§ 20.	Die Lagrangesche Multiplikatorenmethode . . . . .	470
20.1	Nebenbedingungen mit Funktionalen . . . . .	470
20.2	Beispiel der Kettenlinie . . . . .	471
20.3	Das Prinzip von KAMKE für Eigenwertaufgaben . . . . .	472
20.4	Nebenbedingungen mit Operatoren . . . . .	474
§ 21.	Aufstellung von Variationsaufgaben . . . . .	474
21.1	Das Umkehrproblem der Variationsrechnung . . . . .	474
21.2	Die Variationsgleichung, ein notwendiges und hinreichendes Kriterium . . . . .	475
21.3	Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	476
21.4	Selbstadjungierte Differentialgleichungen vierter Ordnung . . . . .	477
21.5	Tabellen . . . . .	478
§ 22.	Die Methoden von RITZ und GALERKIN . . . . .	484
22.1	Das Ritzsche Verfahren . . . . .	484
22.2	Eine Eigenwertaufgabe . . . . .	485
22.3	Das Verfahren von GALERKIN . . . . .	487
22.4	Vergleich des Ritzschen und Galerkinschen Verfahrens, Beispiel . . . . .	489
22.5	Das Verfahren von KANTOROWITSCH, Anmerkungen . . . . .	490



§ 23. Die Verfahren von FRIEDRICH, TREFFTZ und SYNGE . . . . .	491
23.1 Die Friedrichssche Transformation . . . . .	491
23.2 Mehrdimensionale Aufgaben für eine unbekannt Funktion . . . . .	494
23.3 Die Prinzipien der Elastostatik . . . . .	495
23.4 Die Prinzipien der Plattenbiegung . . . . .	497
23.5 Das Trefftzsche Verfahren . . . . .	498
23.6 Orthogonalität im Funktionenraum . . . . .	501
23.7 Die Hyperkreismethode . . . . .	503
VI. Exakte Lösung und Einführung in die numerische Behandlung . . . . .	505
§ 24. Geschlossen lösbare Aufgaben und Potenzreihen . . . . .	505
24.1 Hinweise . . . . .	505
24.2 Zwei Klassen geschlossen lösbarer Eigenwertaufgaben . . . . .	506
24.3 Partielle Differentialgleichungen . . . . .	507
24.4 Allgemeines über Potenzreihenentwicklung . . . . .	510
24.5 Eindimensionale Aufgaben . . . . .	511
24.6 Beispiel mit nicht existierender Potenzreihe . . . . .	513
24.7 Mehrdimensionale Aufgaben . . . . .	514
24.8 Anhang: Lösungen der Potentialgleichung und der reduzierten Wellengleichung in verschiedenen Koordinatensystemen . . . . .	515
§ 25. Orthogonal-, Eigenfunktions- und asymptotische Reihen . . . . .	518
25.1 Orthogonalreihen bei eindimensionalen Aufgaben . . . . .	518
25.2 Die Fourier-Methode für Potentialprobleme in Rechtecksbereichen . . . . .	520
25.3 Entwicklung nach Eigenfunktionen . . . . .	522
25.4 Asymptotische Reihen . . . . .	524
25.5 Beispiele für asymptotische Entwicklungen . . . . .	526
§ 26. Numerische Behandlung: Allgemeines und zwei Methoden . . . . .	529
26.1 Einige Prinzipien numerischer Methoden . . . . .	529
26.2 Hebung von Singularitäten . . . . .	531
26.3 Das Verhalten von Potentialfunktionen in der Nähe von Randsingularitäten . . . . .	532
26.4 Behandlung von Randwertaufgaben als Anfangswertaufgaben . . . . .	535
26.5 Nichtlineares Beispiel . . . . .	536
26.6 Störungsrechnung . . . . .	538
26.7 Lineare Aufgaben . . . . .	540
§ 27. Defektabgleich . . . . .	542
27.1 Defekt und Fehler . . . . .	542
27.2 Fehlerabschätzungen . . . . .	542
27.3 Kollokation . . . . .	544
27.4 Ein Beispiel . . . . .	545
27.5 Die Fehlerorthogonalitätsmethode . . . . .	548
27.6 Die Fehlerquadratmethode . . . . .	550
27.7 Fehlerabschätzung für ein nichtlineares System . . . . .	553
27.8 Die Fehlerbetragsmethode . . . . .	555
VII. Differenzen- und Quadraturverfahren . . . . .	556
§ 28. Die Formeln des Differenzenverfahrens . . . . .	556
28.1 Einleitung . . . . .	556

28.2	Eindimensionale Differenzenausdrücke . . . . .	557
28.3	Beziehungen zur Differenzenrechnung . . . . .	559
28.4	Mehrdimensionale Differenzenausdrücke . . . . .	560
28.5	Aufstellung einer speziellen Differenzenformel . . . . .	562
28.6	Das Mehrstellenverfahren . . . . .	565
28.7	Zusammenstellung eindimensionaler Differenzenformeln . . . . .	567
28.8	Zusammenstellung mehrdimensionaler Differenzenformeln . . . . .	572
§ 29.	Die praktische Durchführung des Differenzenverfahrens . . . . .	581
29.1	Allgemeines zur Aufstellung der Differenzengleichungen . . . . .	581
29.2	Auflösung der Differenzengleichungen . . . . .	582
29.3	Extrapolationsverfahren . . . . .	584
29.4	Eindimensionale Beispiele . . . . .	586
29.5	Zweidimensionale Beispiele . . . . .	590
§ 30.	Möglichkeiten zur Fehlerabschätzung . . . . .	593
30.1	Verschiedene Wege zur Gewinnung von Schranken . . . . .	593
30.2	Lineare, eindimensionale Aufgaben . . . . .	594
30.3	Nichtlineare Aufgaben der Klasse $M$ . . . . .	596
30.4	Zwei weitere Klassen nichtlinearer Probleme . . . . .	597
30.5	Vergleich verschiedener Abschätzungen an einem Beispiel . . . . .	601
30.6	Lineare, zweidimensionale Aufgaben . . . . .	604
30.7	Eigenwertschranken bei mehrdimensionalen Aufgaben . . . . .	606
§ 31.	Das Summenverfahren bei Integralgleichungen . . . . .	607
31.1	Diskretisierung mittels Quadraturformeln . . . . .	607
31.2	Vergleich von Differenzen- und Quadraturverfahren . . . . .	608
31.3	Hinweise zur Anwendung der Summenmethode . . . . .	610
31.4	Fehlerabschätzungen . . . . .	611
31.5	Interpolation der Lösung . . . . .	613
31.6	Beispiel . . . . .	616
§ 32.	Ergänzungen . . . . .	617
32.1	Kernersetzung bei Integralgleichungen . . . . .	617
32.2	Spezielle Kernersetzungsverfahren . . . . .	619
32.3	Herleitung von Differenzenformeln aus Variationsausdrücken . . . . .	621
32.4	Spezielle Methoden für Zylinderbereiche . . . . .	624
VIII.	Iterationsverfahren . . . . .	626
§ 33.	Der Kontraktionssatz . . . . .	626
33.1	Einleitung . . . . .	626
33.2	Verallgemeinerung des Abstandsbegriffs . . . . .	627
33.3	Definition des Abstandsraumes . . . . .	629
33.4	Definition des Objektraumes . . . . .	630
33.5	Majorisierung von Operatoren . . . . .	630
33.6	Formulierung des Kontraktionssatzes . . . . .	631
33.7	Einige oft benutzte Räume . . . . .	632
§ 34.	Weitere Fixpunktsätze, Beispiel . . . . .	634
34.1	Spezielle Formen des Kontraktionssatzes . . . . .	634
34.2	Vom Kontraktionssatz unabhängige Fixpunktaussagen . . . . .	635
34.3	Ein Kriterium für die Kompaktheit . . . . .	636
34.4	Aufstellung von Iterationsvorschriften . . . . .	637
34.5	Ein Beispiel . . . . .	638

§ 35. Methoden zur Konvergenzzeugung und -verbesserung . . . .	641
35.1 Banach-Räume . . . . .	641
35.2 Ein Fixpunktsatz . . . . .	642
35.3 Erläuterungen zum Newtonschen Verfahren und zur Regula Falsi . . . . .	643
35.4 Verallgemeinerung dieser Methoden auf Banach-Räume. .	644
35.5 Inhomogenes Beispiel . . . . .	644
35.6 Das Newtonsche Verfahren bei Eigenwertaufgaben . . .	649
35.7 Beispiel einer Eigenwertaufgabe . . . . .	651
§ 36. Ergänzungen . . . . .	654
36.1 Weitere Iterationsverfahren bei Eigenwertaufgaben . . .	654
36.2 Übertragung auf inhomogene Aufgaben . . . . .	656
36.3 Kombination mit anderen Verfahren . . . . .	659
36.4 Das Schwarzsche alternierende Verfahren . . . . .	660
36.5 Fehlerabschätzung für das alternierende Verfahren . . .	662
36.6 Beispiel für die praktische Durchführung . . . . .	664
Literatur . . . . .	666
<b>Sachverzeichnis</b> . . . . .	670

## Inhalt der weiteren drei Teilbände

### Teil I

(Bereits erschienen)

- A. Funktionentheorie
- B. Spezielle Funktionen
- C. Funktionaltransformationen
- Sachverzeichnis

### Teil III

(Bereits erschienen)

- F. Algebra
- G. Geometrie
  - I. Geometrie im engeren Sinne
  - II. Tensoralkül nebst Anwendungen
- H. Interpolation und numerische Quadratur
- I. Approximation von Funktionen
  - I. Theoretische Grundlagen
  - II. Darstellung von Funktionen in Rechenautomaten
- J. Unternehmensforschung (lineare und nichtlineare Optimierung)
- K. Rechenanlagen
- Sachverzeichnis

### Teil IV

(In Vorbereitung)

- L. Bewegungsstabilität bei Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden
- M. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik
- N. Die wichtigsten Formeln aus Mechanik und Elektrotechnik
- Gesamt-Sachverzeichnis (für alle 4 Teilbände)