

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	3
Notation	5
Inhaltsverzeichnis	7
1 Randwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung	11
1.1 Problemstellung	11
1.2 Grundlegende Aussagen	12
1.3 Das klassische Differenzenverfahren	16
1.3.1 Die lineare Randwertaufgabe und äquidistante Gitter	16
1.3.2 Semilineare und quasilineare Randwertaufgabe und äquidistante Gitter	23
1.3.3 Nichtäquidistante Gitter	27
1.4 Zugänge zu Differenzenverfahren	33
1.4.1 Mehrpunktformeln	33
1.4.2 Weitere Zugänge zu Differenzenverfahren	35
1.4.3 Kompakte Schemata beliebiger Ordnung	37
1.5 Extrapolation und Defektkorrektur	40
1.5.1 Kollokationsverfahren	42
2 Elliptische Randwertaufgaben zweiter Ordnung: Klassische Lösungen und Differenzenverfahren	51
2.1 Grundlegende Aussagen	51
2.2 Differenzenverfahren für die Poisson-Gleichung	57
2.2.1 Die Fünfpunkt-Formel im Einheitsquadrat	57
2.2.2 Mehrpunkt-Diskretisierungen	60
2.2.3 Diskretisierung in einem beliebigen Gebiet	62
2.3 Allgemeine Differentialoperatoren	65
2.3.1 Allgemeinere elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung	65
2.3.2 Randbedingungen 2. und 3. Art	68
2.4 Weitere Zugänge zu Differenzenverfahren	69
2.4.1 Steklov'sche Mittelungsoperatoren	69
2.4.2 Box-Schemata	71
3 Schwache Lösungen, elliptische Differentialgleichungen und Sobolev-Räume	74
3.1 Einführung	74
3.2 Angepaßte Funktionenräume	76
3.3 Variationsgleichungen und konforme Approximation	89

3.4	Stabile Variationsgleichungen	107
3.5	Nichtlineare Probleme	109
4	Methode der finiten Elemente	114
4.1	Ein Beispiel	114
4.2	Finite-Elemente-Räume	119
4.2.1	Lokale Elemente und globale Eigenschaften	119
4.2.2	Einige wichtige Finite-Elemente-Ansätze im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	129
4.3	Bézier-Bernstein-Polynome	144
4.3.1	Eindimensionale Splines in Bézier-Bernstein-Darstellung	144
4.3.2	Zweidimensionale Splines in Bézier-Bernstein-Darstellung	148
4.3.3	Mehrdimensionale B-Splines und Box-Splines	154
4.4	Realisierung der Finite-Elemente-Methode	158
4.4.1	Struktur der Teilaufgaben	158
4.4.2	Grundstrukturen der Daten	159
4.4.3	Erzeugung der endlichdimensionalen Probleme	160
4.4.4	Gittergenerierung	164
4.5	Konvergenz konformer Methoden	170
4.5.1	Basisaussagen zur Interpolation in Sobolev-Räumen	170
4.5.2	Hilbert-Raum-Abschätzungen	178
4.5.3	Gleichmäßige Fehlerabschätzungen	183
4.6	Nichtkonforme Finite-Elemente-Methoden	188
4.6.1	Einführung	188
4.6.2	Ansatzräume mit geringerer Glattheit	190
4.6.3	Näherungsweise Integration	195
4.6.4	Approximation krummliniger Ränder	203
4.7	Gemischte finite Elemente	206
4.7.1	Gemischte Variationsgleichungen und Sattelpunkte	206
4.7.2	Konforme Approximation gemischter Variationsgleichungen	213
4.7.3	Abschwächungen von Glattheitsforderungen	219
4.7.4	Penalty-Methoden und modifizierte Lagrange-Funktionen	224
4.8	Fehlerschätzer und Gittersteuerung	233
4.8.1	Fehlerschätzer nach Babuška und Rheinboldt	234
4.8.2	Interpolationsfehlerindikatoren	239
4.9	Hinweise zu weiteren interessanten Entwicklungen	241
4.9.1	Superkonvergenz	241
4.9.2	Die h-, p- und h-p-Version der Methode der finiten Elemente	243
4.9.3	Extrapolation und Defektkorrektur	244
5	Numerische Verfahren für die diskretisierten Probleme	246
5.1	Besonderheiten der Aufgabenstellung	246
5.2	Direkte Verfahren	249
5.2.1	Das Gauß-Verfahren für Bandmatrizen	249
5.2.2	Schnelle Fourier-Transformation zur Lösung der diskreten Poisson-Gleichung	250

5.3	Iterationsverfahren	255
5.4	Relaxations- und Splittingverfahren	266
5.5	CG - Verfahren	272
5.6	Mehrgitterverfahren	283
6	Die numerische Behandlung parabolischer Probleme	293
6.1	Analysis parabolischer Probleme	293
6.2	Differenzenverfahren	299
6.3	Die (vertikale) Linienmethode	306
6.3.1	Semidiskretisierung mittels finiter Elemente	307
6.3.2	Die Zeitdiskretisierung mit Standardverfahren	315
6.3.3	Die Zeitdiskretisierung mit diskontinuierlicher Galerkin-Methode	325
6.4	Rothe-Methode	330
6.5	Fehlerkontrolle	334
7	Singuläre Störungen und hyperbolische Probleme	340
7.1	Singuläre Störungen	340
7.1.1	Zweipunkt-Randwertaufgaben	340
7.1.2	Örtlich eindimensionale parabolische Probleme	360
7.1.3	Elliptische Randwertaufgaben (Konvektions-Diffusions-Gleichungen)	365
7.2	Erhaltungsgleichungen	385
7.2.1	Der lineare Fall	385
7.2.2	Zur Analysis der Erhaltungsgleichung im nichtlinearen Fall	388
7.2.3	Numerische Verfahren für die nichtlinearen Erhaltungsgleichungen	393
8	Numerische Methoden für Variationsungleichungen	402
8.1	Aufgabenstellung	402
8.2	Diskretisierung von Variationsungleichungen	412
8.3	Penalty-Methoden	421
8.4	Wahl der Parameter	437
9	Randintegralmethoden und Randelemente: ein kurzer Abriß	445
9.1	Beispiele von Randintegralgleichungen	446
9.2	Variationsformulierung	449
9.3	Die Randelementmethode	451
9.4	Dualität und das Trefftz-Verfahren	453
	Literaturverzeichnis	457
	Index	474