

Inhalt

Teil 1: Differentialrechnung	9
1. Problemstellung und Historisches	9
2. Grenzwerte	10
2.1. Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$	10
2.1.1. Definition des Grenzwertes einer Funktion für $x \rightarrow x_0$	10
2.1.2. Die „ ε - δ -Charakterisierung“ des Grenzwertes	13
2.2. Einseitige Grenzwerte	15
2.3. Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$	17
2.4. Bestimmte und unbestimmte Divergenz	18
2.5. Grenzwertsätze	20
3. Stetigkeit	25
3.1. Der Begriff der Stetigkeit	25
3.2. Einseitige Stetigkeit. Stetigkeit auf einem Intervall	27
3.3. Unstetigkeitsstellen und ihre Klassifikation	29
3.4. Eigenschaften stetiger Funktionen	32
3.4.1. Das Rechnen mit stetigen Funktionen	32
3.4.2. Stetigkeit der elementaren Funktionen	33
3.4.3. Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen	35
3.4.4. Stetigkeit der Umkehrfunktion	38
4. Ableitungen	39
4.1. Vorbemerkungen	39
4.2. Der Begriff der Ableitung	41
4.2.1. Definition der Ableitung	41
4.2.2. Bedeutung der Ableitung	42
4.2.3. Beispiele	43
4.2.4. Einseitige Ableitungen	45
4.2.5. Differenzierbarkeit auf einem Intervall	47
4.3. Differenzierbarkeit und Stetigkeit	48
4.4. Allgemeine Differentiationsregeln	48
4.4.1. Ableitungen von Summe, Produkt und Quotient	48
4.4.2. Ableitung mittelbarer Funktionen (Kettenregel)	50
4.4.3. Ableitung der Umkehrfunktion	52
4.5. Ableitungen einiger Grundfunktionen	53
4.5.1. Tabelle der Ableitungen	53
4.5.2. Beweis der Formeln von 4.5.1.	54
4.6. Technik des Differenzierens	57
4.6.1. Beispiele	57
4.6.2. Logarithmische Differentiation	59
4.6.3. Bemerkungen	61
4.7. Einige Ergänzungen zum Ableitungsbegriff	62
4.7.1. Die Differentialgleichung $y' = \alpha y$	62
4.7.2. Der Differentiationsoperator	63

4.8. Ableitungen höherer Ordnung	65
4.8.1. Definitionen und Beispiele	65
4.8.2. Physikalische Bedeutung der 2. Ableitung	67
4.8.3. Rechenregeln für Ableitungen höherer Ordnung	68
5. Differentiale	69
5.1. Weierstraßsche Zerlegungsformel und Differential	69
5.2. Fehlerrechnung und Differential	72
5.2.1. Grundbegriffe der Fehlerrechnung	72
5.2.2. Anwendung des Differentials	75
5.3. Differentiale höherer Ordnung	78
6. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	79
6.1. Die Sätze von Fermat und Rolle	79
6.2. Mittelwertsätze der Differentialrechnung	80
6.2.1. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	80
6.2.2. Folgerungen aus dem Mittelwertsatz	84
6.2.3. Der erweiterte Mittelwertsatz der Differentialrechnung	85
6.3. Die Taylorsche Formel und ihre Anwendung	86
6.3.1. Taylorsche Formel für ganze rationale Funktionen	86
6.3.2. Das Hornerische Schema	87
6.3.3. Taylorsche Formel für beliebige Funktionen	92
6.3.4. Taylorsche Formel einiger elementarer Funktionen	96
6.3.5. Anwendungen der Taylorschen Formel	100
7. Untersuchung von Funktionen mit Hilfe ihrer Ableitungen	107
7.1. Berechnung von Grenzwerten	107
7.1.1. Vorbemerkung	107
7.1.2. Grenzwerte vom Typ $\frac{0^a}{0}$ und $\frac{\pm\infty^a}{\pm\infty}$ (Regeln von Bernoulli-de l'Hospital)	108
7.1.3. Grenzwerte vom Typ „ $0 \cdot (\pm\infty)^a$ “ und „ $(+\infty) - (+\infty)^a$ “	111
7.1.4. Grenzwerte vom Typ „ 0^a “, „ $(+\infty)^a$ “ und „ $1^{\pm\infty}$ “	112
7.2. Monotonie	113
7.3. Relative Extremwerte	115
7.3.1. Der Begriff des relativen Extremwertes	115
7.3.2. Eine notwendige Bedingung (kritische Stellen)	117
7.3.3. Eine hinreichende Bedingung	118
7.3.4. Eine weitere hinreichende Bedingung	121
7.4. Absolute Extremwerte	124
7.4.1. Ermittlung absoluter Extremwerte	124
7.4.2. Einige Anwendungen	125
7.5. Konvexität und Wendepunkte	128
7.5.1. Konvexe und konkave Funktionen	128
7.5.2. Wendepunkte	131
7.6. Kurvendiskussion	133
7.7. Näherungsweise Lösung von Gleichungen der Form $f(x) = 0$	137
7.7.1. Vorbemerkung	137
7.7.2. Regula falsi	137
7.7.3. Das Newtonsche Verfahren	141
7.7.4. Das allgemeine Iterationsverfahren	145

Teil 2: Integralrechnung	153
8. Problemstellung und Historisches	153
9. Das unbestimmte Integral	155
9.1. Definition und einige Integrationsregeln	155
9.1.1. Stammfunktionen und unbestimmte Integrale	155
9.1.2. Unbestimmte Integrale der Grundfunktionen	156
9.1.3. Einige allgemeine Integrationsregeln für unbestimmte Integrale	157
9.1.4. Die Substitutionsmethode bei unbestimmten Integralen	159
9.1.5. Die partielle Integration	162
9.1.6. Möglichkeiten und Grenzen der Integration und der Integrationsregeln	164
9.2. Integration rationaler Funktionen	164
9.2.1. Problemstellung und -reduzierung	164
9.2.2. Zerlegung echt gebrochener rationaler Funktionen in Partialbrüche	165
9.2.3. Integration der Partialbrüche	168
9.3. Integration weiterer Funktionenklassen	171
9.3.1. Das Integral $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$	172
9.3.2. Das Integral $\int R(e^x) dx$	173
9.3.3. Das Integral $\int R(\sin x, \cos x) dx$	174
9.3.4. Das Integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$	175
9.3.5. Elliptische Integrale	176
10. Das bestimmte Integral	177
10.1. Definition, Existenz und Eigenschaften	177
10.1.1. Integralsummen	177
10.1.2. Das bestimmte Integral	177
10.1.3. Integrierbare Funktionen	179
10.1.4. Eigenschaften des bestimmten Integrals	180
10.2. Berechnung bestimmter Integrale	182
10.2.1. Problematik	182
10.2.2. Bestimmtes Integral mit variabler oberer Grenze	183
10.2.3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	185
10.2.4. Die Substitutionsmethode bei bestimmten Integralen	187
10.3. Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale	190
10.3.1. Problemstellung	190
10.3.2. Die Rechteck- und die Trapezformel	191
10.3.3. Die Simpsonsche Regel	194
10.4. Einige Anwendungen des bestimmten Integrals	199
10.4.1. Anwendungen in der Geometrie	199
10.4.2. Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften	212
10.4.3. Ein Integralmodell in der Ökonomie	218
10.5. Einige Ergänzungen zum Integralbegriff	219
10.5.1. Das bestimmte Integral und der Maßbegriff	219
10.5.2. Andere Integralbegriffe	221
11. Uneigentliche Integrale	225
11.1. Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen	225
11.1.1. Definition und Berechnung uneigentlicher Integrale mit unendlichen Grenzen	225

11.1.2. Cauchyscher Hauptwert	231
11.1.3. Existenzkriterien (Konvergenzkriterien) für uneigentliche Integrale	232
11.2. Uneigentliche Integrale mit nichtbeschränkter Funktion	235
11.2.1. Definition und Berechnung	235
11.2.2. Einige Ergänzungen	238
Lösungen der Aufgaben	240
Literatur	261
Namen- und Sachregister	262