

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
1 Allgemeine Überlegungen zur Didaktik der Mathematik	3
1.1 Ziele des Mathematikunterrichts	3
1.2 Die Entwicklung des Mathematikunterrichts	6
1.3 Mathematik-Lehrpläne	15
2 Abriß der historischen Entwicklung der Mathematik	19
2.1 Die Anfänge der Mathematik	19
2.1.1 Ägyptische Mathematik	19
2.1.2 Babylonische Mathematik	20
2.2 Mathematik als wissenschaftliches System	22
2.2.1 Die Anfänge der griechischen Mathematik	22
2.2.2 Geometrie als wissenschaftliches System	23
2.2.3 Zukunftsweisende Arbeiten	24
2.3 Der Beitrag des Orients	25
2.3.1 Die Mathematik der Inder	25
2.3.2 Die Mathematik der Araber	26
2.4 Der Beginn der abendländischen Mathematik	27
2.4.1 Impulse für die Geometrie aus der darstellenden Kunst	27
2.4.2 Fortschritte in der Algebra	27
2.5 Das 17. Jahrhundert	28
2.5.1 Die analytische Geometrie	28
2.5.2 Die Infinitesimalrechnung	29
2.6 Das 18. Jahrhundert	29
2.6.1 Ausbau und Anwendung der Infinitesimalrechnung	30
2.6.2 Der Abschluß der klassischen Algebra	30
2.7 Das 19. Jahrhundert	31
2.7.1 Die moderne Algebra	31
2.7.2 Die Grundlagen der Analysis	31
2.7.3 Die Vektorrechnung	32
2.7.4 Nichteuklidische Geometrien	32
2.7.5 Die Entstehung der Mengenlehre	32
2.8 Tabellarischer Überblick	34

3	Mathematische Denkstrukturen	37
3.1	Der Abstraktionsvorgang	37
3.2	Die analytische Denkweise	39
3.3	Das deduktive Denken	41
3.4	Der systematische Aufbau der Mathematik	43
3.5	Das axiomatische Denken	45
3.6	Das funktionale Denken	48
3.7	Die geeignete Darstellung	49
3.8	Die Synthese von Geometrie und Algebra	51
3.9	Der Unendlichkeitsbegriff	52
4	Inhalte des Mathematikunterrichts: Arithmetik	54
4.1	Allgemeine Anmerkungen zur Didaktik	54
4.1.1	Zahlbegriff	54
4.1.2	Darstellung natürlicher Zahlen	55
4.1.3	Rechnen mit natürlichen Zahlen	55
4.1.4	Einführung der positiven rationalen Zahlen	59
4.1.5	Einführung der negativen Zahlen	62
4.1.6	Einführung der reellen Zahlen	63
4.2	Historische Entwicklung	65
4.2.1	Zahlbegriff	65
4.2.2	Darstellung natürlicher Zahlen	68
4.2.3	Rechnen mit natürlichen Zahlen	76
4.2.4	Positive rationale Zahlen	87
4.2.5	Negative Zahlen	104
4.2.6	Reelle Zahlen	107
4.3	Didaktische Konsequenzen	120
4.3.1	Zahlbegriff	120
4.3.2	Darstellung natürlicher Zahlen	123
4.3.3	Rechnen mit natürlichen Zahlen	124
4.3.4	Einführung der positiven rationalen Zahlen	130
4.3.5	Einführung der negativen Zahlen	132
4.3.6	Einführung der reellen Zahlen	134
5	Inhalte des Mathematikunterrichts: Algebra	138
5.1	Allgemeine Anmerkungen zur Didaktik	138
5.1.1	Grundsätzliche Überlegungen	138
5.1.2	Termumformungen	140

5.1.3	Zahlbereiche in der Algebra	144
5.1.4	Grundlagen der Gleichungslehre	145
5.1.5	Das Aufstellen von Gleichungen	147
5.1.6	Lineare Gleichungen	147
5.1.7	Gleichungssysteme	149
5.1.8	Quadratische Gleichungen	152
5.1.9	Bruchgleichungen	155
5.1.10	Wurzelgleichungen	155
5.1.11	Boolesche Algebra	156
5.2	Historische Entwicklung	159
5.2.1	Der Gleichungsbegriff	159
5.2.2	Die symbolische Schreibweise	162
5.2.3	Termumformungen	170
5.2.4	Erweiterung der Grundmenge der natürlichen Zahlen	175
5.2.5	Lineare Gleichungen	177
5.2.6	Lineare Gleichungssysteme	182
5.2.7	Quadratische Gleichungen	187
5.2.8	Boolesche Algebra	199
5.3	Didaktische und methodische Konsequenzen	200
5.3.1	Gleichungsbegriff	200
5.3.2	Symbolische Schreibweise	202
5.3.3	Termumformungen	204
5.3.4	Lineare Gleichungen	207
5.3.5	Lineare Gleichungssysteme	209
5.3.6	Quadratische Gleichungen	211
5.3.7	Boolesche Algebra	214
6	Inhalte des Mathematikunterrichts: Geometrie	216
6.1	Allgemeine Anmerkungen zur Didaktik	216
6.1.1	Der deduktive Aufbau der Geometrie	216
6.1.2	Geometrische Grundbegriffe	222
6.1.3	Messen in der Geometrie	224
6.1.4	Grundfragen der Trigonometrie	227
6.1.5	Vektorräume	232
6.2	Historische Entwicklung	238
6.2.1	Geometrische Grundbegriffe	238
6.2.2	Der axiomatische Aufbau der Geometrie	245
6.2.3	Längen- und Flächenberechnungen	258

6.2.5	Analytische Geometrie	289
6.3	Didaktische und methodische Konsequenzen	298
6.3.1	Geometrische Grundbegriffe	298
6.3.2	Der Aufbau eines geometrischen Systems	299
6.3.3	Messen in der Geometrie	306
6.3.4	Flächenberechnung	307
6.3.5	Trigonometrie	311
6.3.6	Analytische Geometrie	318
7	Inhalte des Mathematikunterrichts: Analysis	322
7.1	Allgemeine Anmerkungen zur Didaktik	322
7.1.1	Der traditionelle Aufbau der Analysis	322
7.1.2	Die Non-Standard-Analysis	330
7.2	Historische Entwicklung	338
7.2.1	Der Begriff des Unendlichen	338
7.2.2	Integralrechnung	352
7.2.3	Differentialrechnung	374
7.2.4	Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung	383
7.3	Didaktische und methodische Konsequenzen	387
7.3.1	Allgemeine Überlegungen	387
7.3.2	Die Vollständigkeit der reellen Zahlen	389
7.3.3	Grenzwerte von Folgen und Reihen	390
7.3.4	Grenzwerte von Funktionen	393
7.3.5	Die Ableitung	395
7.3.6	Die Ableitungsregeln	397
7.3.7	Ableitung nichtrationaler Funktionen	400
7.3.8	Integralrechnung	402
	Literatur	408
	Personenregister	411
	Sachregister	414