

Inhalt

0	Einleitung	1
1	Problemlösen und Mathematikunterricht	3
1.1	Bedeutung von Problemlösekompetenzen	3
1.2	Zur Psychologie des Problemlösens	4
1.2.1	Was ist ein Problem?.....	6
1.2.2	Routineaufgabe vs. Problemaufgabe am Beispiel $f(x) = \frac{1}{\cos x}$	7
1.2.3	Wissensstrukturen	11
1.2.4	Modellierung von Problemlöseprozessen	14
1.3	Heuristik in der mathematikdidaktischen Forschung.....	16
1.3.1	Zur Analyse heuristischer Strategien.....	16
1.3.2	Die Kreisaufgabe	18
1.4	Kompetentes Problemlösen als zentrales Bildungsziel des MU.....	23
1.4.1	Geschichtliche Entwicklung.....	23
1.4.2	Heuristik und das „Bild von Mathematik“	24
1.4.3	Derzeitige Realität und Defizite	26
1.5	Zusammenfassung und Ziele	29
2	„Das Extremale“ als Lebens- und Denkprinzip.....	31
2.1	„Extremalität“ als charakteristische Eigenschaft von Objekten und Beziehungen	31
2.1.1	„Extremalität“ - ein Grundmotiv menschlichen Lebens	31
2.1.1.1	Funktion von Extremwerten im Alltag.....	31
2.1.1.2	Alltagsobjekte als Endprodukte des Optimierungsstrebens	35
2.1.2	Extrema in der Natur.....	35
2.2	„Extrema“ in der Mathematik.....	39
2.2.1	Ein Blick in die Geschichte - klassische Optimierungsprobleme.....	39
2.2.2	Mathematische Verfahren	40
2.2.3	Neuere Optimierungstheorie	41

2.2.4	Mathematik als „extreme“ Wissenschaft - Ideale Eigenschaften mathematischer Objekte und Modelle	42
2.2.5	Optimieren in der mathematischen und mathematikdidaktischen Literatur	43
2.3	Zusammenfassung - Optimieren als fundamentale Idee	43
3	Das Extremalprinzip (EP) als heuristische Strategie	46
3.1	Einführung	46
3.1.1	Erste Formulierung	46
3.1.2	Erste Beispiele	47
3.1.3	Das Extremalprinzip in der mathematikdidaktischen Literatur	51
3.1.4	Untersuchungsfeld	54
3.2	Variationen des Extremalprinzips - Versuch einer Klassifizierung	55
3.2.1	Das Korrespondenzprinzip - Extrema als Objekte mit besonderen Eigenschaften	56
3.2.1.1	Extrema als potentielle Kandidaten bei Existenzproblemen – Identifikationsfunktion	57
3.2.1.2	Extrema als potentielle Gegenbeispiele bei Allverneinenden Aussagen - Monsterfunktion	74
3.2.1.3	Extrema als determinierende Objekte: Reduktion der Komplexität - Determinationsfunktion	78
3.2.1.4	Zusammenfassung	84
3.2.2	Das EP bei Ungleichungen und Abschätzungen	84
3.2.3	Vom Kleinsten zum Größten - Das Induzieren einer Ordnung	88
3.2.3.1	Abzählprobleme	88
3.2.3.2	Konstruktionsprobleme	92
3.2.3.3	Greedy-Strategien	97
3.2.4	Grenzen, die keine sind - Das EP in der Zahlentheorie	97
3.2.4.1	Das EP bei „Allbejahenden Aussagen“	98
3.2.4.2	Das EP bei „Unendlichkeits-Problemen“	101
3.2.4.3	Das EP bei „Allverneinenden Aussagen“	104
3.2.5	Descente Infinie (DI)	107

3.2.5.1 Irrationalität und „unendlicher Abstieg“	117
3.2.6 Das EP und verwandte Strategien.....	125
3.2.6.1 Monovarianten, Invarianten und Potentiale.....	125
3.2.6.2 Das Symmetrieprinzip.....	130
3.2.6.3 Das Schubfachprinzip.....	138
3.2.7 Einbettung des EP in die allgemeine Heuristik - Spezial-, Rand- und Extremfälle.....	139
3.3 Das Extremalprinzip zur Generierung neuen Wissens.....	156
3.4 Zusammenfassung.....	161
3.4.1 Rückblick - Kritische Anmerkungen	161
3.4.2 Das EP in der psychologischen Literatur	163
3.4.3 Das Extremale als fundamentale Idee.....	164
4 Empirische Studien.....	166
4.1 Rahmenbedingungen.....	166
4.2 Empirisches zu einzelnen Problemen aus Kapitel 3	168
4.2.1 Beispiele zum Korrespondenzprinzip	168
4.2.2 Beispiele zum EP bei Abzählproblemen.....	174
4.2.3 Descente Infinie	177
4.2.4 Spezial-, Rand- und Extremfälle.....	179
4.3 Ein Fragebogen.....	181
4.4 Zusammenfassung und Einordnung.....	183
5 Didaktische Konsequenzen - Das EP im MU.....	189
5.1 Zum Lehren von Heuristik	189
5.2 Das EP im MU.....	192
5.2.1 Anknüpfungspunkte an den „Kern des Curriculums“	194
5.2.2 Weitere Funktionen des EP im MU	201
Gefahren und Schwierigkeiten beim EP	204
5.3 Zusammenfassung und Ausblick	207
Literaturverzeichnis.....	210
Verzeichnis der Abkürzungen.....	221