

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	13
Zusammenschau.	16

Erster Teil: Didaktik

I. Didaktische Inhalte der Mathematik	19
§ 1 Der Halbring der natürlichen Zahlen	23
A. Die Addition 24 — B. Die Multiplikation 30 — C. Das distributive Gesetz 37 — D. Der Begriff Halbring 39 — E. Inverse Verknüpfungsweisen: Subtraktion und Division 42	
§ 2 Der Halbkörper der positiven rationalen Zahlen	46
A. Die gewöhnlichen Brüche 46 — B. Die Dezimalbrüche 65	
§ 3 Algebraische Irrationalzahlen (Quadratwurzeln)	69
§ 4 Transzendente Irrationalzahlen	72
§ 5 Zusammenfassung über die Erweiterungen des Zahlbegriffes in der Grund- und Hauptschule	73
§ 6 Der Zahlbegriff in der Mengenlehre	73
A. Der Begriff Menge 75 — B. Abbildungen von Mengen 76 — C. Abzählbarkeit 80 — D. Ein Beispiel für eine nicht abzählbare Menge 88 — E. Die Mengenlehre im Rechenunterricht 93: I. Der Zahlbegriff der Mengenlehre 93 — II. Die additiven Verknüpfungen 100 — III. Das Produkt 105 — IV. Enthaltensein und Teilen 114 — V. Ordnungen 117 — VI. Brüche 127	
§ 7 Die Peanoschen Axiome der natürlichen Zahlen	139
§ 8 Das Sachrechnen als Struktur (Vektorräume)	147
§ 9 Sog. Bürgerliches Rechnen als Abbildung von Strukturen	153
A. Der Dreisatz 154 — B. Der zusammengesetzte und der umgekehrte Dreisatz 157 — C. Andere Abbildungen 160	
§ 10 Sachrechnen und abstraktes Rechnen	161
§ 11 Gleichungen in Strukturen	162
A. Aussagen, Aussageformen 162 — B. Gleichungen und Ungleichungen 164 — C. Lösen von Bedingungsgleichungen 166 — D. Lösen von Ungleichungen 174	

§ 12	Geschichte der Ziffernschrift	178
	A. Die Babylonier 178 — B. Die Ägypter 180 — C. Die Griechen 182 — D. Die Römer 183 — E. Die Inder und die Araber 183 — F. Das Abend- land 184 — G. Die Dezimalbruchrechnung 185	
§ 13	Aufgaben	185
II. Mathematik und Philosophie		188
§ 14	Ältere philosophische Auffassungsweisen der Zahl	188
§ 15	Moderne mathematische Grundlagen von Mathematik und Philosophie	191
	A. Nicht-Aristotelische Logik 193 — B. Terme und Relationen 194 — C. Inhalte einer mathematisch fundierten Logik 199	
§ 16	Zur Problematik der Widerspruchsfreiheit von Logik und Mathematik	201
	A. Semantische Paradoxien 203 — B. Syntaktische Paradoxien 204 — C. Vermeidung von Widersprüchen durch Metawissenschaft 205	
III. Die Entwicklung des mathematischen Denkens beim Kind		207
§ 17	Betrachtung von Mengen	208
	A. Mengen 208 — B. Elemente von Mengen und Klassenbildung 213	
§ 18	Zur Entstehung der ersten Zahlbegriffe	215
§ 19	Zur Entstehung von Elementen eines linken Vektorhalbraumes	223
§ 20	Die Reihe der natürlichen Zahlen	224
§ 21	Zur Psychologie der Halbbringstruktur auf der Menge der natürlichen Zahlen	232
	A. Kind und algebraische Struktur 232 — B. Fortschreitende Verknüpfun- gen 238 — C. Analysierende Verknüpfungen 245	
§ 22	Zur Psychologie der Struktur des linken Vektorhalbraumes	247
§ 23	Das psychologische Verhalten gegenüber Aufgaben des sog. bürgerlichen Rechnens	256
§ 24	Rechentests	261
	A. Reihentests 261 — B. Das Verständnis für Klasseneinteilungen 265 — C. Das Maßverständnis 266 — D. Rechenleistungstests 267 — E. Sach- rechentests 268	
§ 25	Rechenfehler	270
§ 26	Rechenschwächen	275

IV. Pädagogische Inhalte des Rechenunterrichtes	279
§ 27 Die didaktische Provokation	279
§ 28 Erziehung zu freier geistiger Beweglichkeit	283
§ 29 Die Intensivierung von Grundphänomenen der Arbeit	289
§ 30 Rechenlehrmittel	293
A. Arbeitsmittel 293 — B. Anschauungsmittel 312 — C. Übungsmittel 321	

Zweiter Teil: Methodik

V. Mengen im Erstrechenunterricht	325
§ 31 Kardinalzahlfreie Mengenbetrachtungen I	326
Erste Stufe der Mengenbehandlung: Mengen und Vergleiche zwischen ihnen 326—A. Einzelne Mengen 327—B. Bijektionen zwischen Mengen 327	
Zweite Stufe der Mengenbehandlung: Teilmengen 334	
Dritte Stufe der Mengenbehandlung: Vereinigungsmengen und Restmengen 340	
§ 32 Einführung von Kardinalzahlen	343
Vierte Stufe der Mengenbehandlung: Die Kardinalzahlen bis 10 343 —	
A. Einzelbetrachtung 343 — B. Ziffernschrift 364 — C. Zahlvergleich 365 — D. Nachfolger 366 — E. Zählen 370 — F. Null 370	
§ 33 Erste Verknüpfungen in der Menge der natürlichen Zahlen 372	
Fünfte Stufe der Mengenbehandlung: Additive Verknüpfungen 372 —	
A. Zerlegen 372 — B. Addition 378 — C. Ergänzen 380 — D. Subtraktion 382 — E. Bemerkung zu den natürlichen Zahlen über 100 383	
§ 34 Kardinalzahlfreie Mengenbetrachtungen II	383
Sechste Stufe der Mengenbehandlung: Verbindungsmengen 383 —	
A. Konstruktion einiger Elemente der Verbindungsmenge 384 — B. Konstruktion aller Elemente der Verbindungsmenge 385 — C. Die Kardinalzahl von Verbindungsmengen 391	
§ 35 Multiplikative Verknüpfungen	394
Siebte Stufe der Mengenbehandlung: Das Zahladverb 394	
Achte Stufe der Mengenbehandlung: Die Verwendung des Zahladverbs bei Klasseneinteilungen von Verbindungsmengen 396 — A. Die Verbindungsmenge und das Zahladverb (Produkt) 396 — B. Die Verbindungsmenge und gewisse ihrer Klassen gleicher Kardinalzahl 399 — C. Andere Modelle 402	
§ 36 Geordnete Mengen.	405
Neunte Stufe der Mengenbehandlung: Ordnungen 405 — A. Ordnungsrelationen 405 — B. Ordinalzahlen 411	

VI. Verknüpfungen in Mengen	415
§ 37a Additive Verknüpfungen im Halbring der natürlichen Zahlen	415
§ 37b Additive Verknüpfungen in einem linken Vektorhalbraum	421
§ 38 Multiplikative Verknüpfungen im Halbring der natürlichen Zahlen	422
A. Einmaleinsreihen 423 — B. Das kommutative Gesetz 429 — C. Klassen gegebener Kardinalzahl der Teilmengen - Enthaltensein, Faktorenzerlegung 432 — D. Klassen gegebener Anzahl der Teilmengen - Division 435 — E. Das assoziative Gesetz der Multiplikation 437	
§ 39 Das distributive Gesetz	444
A. Das 2. Distributivgesetz der Vektorräume 444 — B. Das 1. Distributivgesetz der Vektorräume 447 — C. Distributivität der Division 447	
§ 40 Die schriftliche Addition natürlicher Zahlen	449
§ 41 Die schriftliche Subtraktion natürlicher Zahlen.	456
A. Getrennte Darstellung von Subtrahend und Differenz 459 — B. Die Verwandlung des Subtrahenden in den Minuenden 471 — C. Die Methode des Schenkens 476	
§ 42 Die schriftliche Multiplikation natürlicher Zahlen	479
§ 43 Die schriftliche Division natürlicher Zahlen	490
A. Einstelliger Divisor 491 — B. Mehrstelliger Divisor 497	
§ 44a Das Multiplikativum	502
§ 44b Das Distributivum	505
VII. Bruchrechnung	506
§ 45 Brüche als Operatoren und Elemente in Vektorräumen	506
A. Die Hälfte 506 — B. Andere Brüche 509 — C. Die Begriffe Zähler und Nenner 512 — D. Der Vergleich von Brüchen 513 — E. Ordnungsisomorphie zwischen einer Menge von Stammbrüchen und der Menge der zugehörigen Nenner 517 — F. Das Erweitern 522 — G. Das Kürzen 525	
§ 46 Betrachtungen aus der additiven Gruppe der Brüche mit ganzzahligem Zähler und Nenner	528
A. Addition gleichnamiger Brüche 529 — B. Addition ungleichnamiger Brüche 529 — C. Das assoziative Gesetz der Addition 530 — D. Die natürliche Zahl als Multiplikator eines Bruches mit positiv ganzzahligem Zähler und Nenner 531	
§ 47 Zur Dezimalbruchrechnung	532
A. Der Begriff Dezimalbruch 532 — B. Der Dezimalbruch in der additiven Gruppe der rationalen Zahlen 539 — C. Näherungswerte von Dezimalbrüchen 541 — D. Der Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalbrüchen 542	
§ 48 Bruch als Multiplikator einer natürlichen Zahl	543
A. Die Gewinnung des Verfahrens 544 — B. Vertiefung der besinnlichen Haltung 546 — C. Die Methode der Aufgabenfolgen 548 — D. „Mal“ und „von“ 552 — E. Die Rechtecksmethode 556	

§ 49	Bruch mal Bruch	560
	A. Die Gewinnung des Verfahrens 560 — B. Vertiefung der besinnlichen Haltung 570 — C. Die Methode der Aufgabenfolgen 572 — D. „Mal“ und „von“ 573 — E. Die Methode des Erweiterns 574	
§ 50	Die Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch	576
	A. Gewinnung und Durchführung des Verfahrens 576 — B. Die Vertiefung des Verfahrens 595 — C. Die Methode des Enthaltenseins 595 — D. Die Methode der Aufgabenfolgen 597 — E. Die Methode des einmaligen Erweiterns 599 — F. Die Methode des zweimaligen Erweiterns 599	
VIII. Abbildungen		601
§ 51	Zur Einführung in die Dreisatzrechnung	601
	A. Homomorphe Abbildungen in der Grundschule 601 — B. Homomorphe Abbildungen in der Hauptschule 603	
§ 52	Ein Beispiel zur Einführung in die Prozentrechnung	616
	A. Vorbereitung 617 — B. Berechnung der Hundertstel 618 — C. Die Begriffe „v. H.“ und „Prozent“ 625	
§ 53	Wurzelziehen	629
	Definition der Quadratwurzel 630 — A. Die Quadratwurzel aus einer Quadratzahl 632 — B. Methode des Abschätzens 632 — C. Die Intervallschachtelung 633 — D. Faktorzerlegungsmethoden 634 — E. Quadrat- und Wurzelstabellen 635 — F. Wurzelziehen mit dem Rechenschieber 637 — G. Graphische Darstellung der Wurzelstabelle 637 — H. Zeichnerische Verfahren 638 — J. Das Heronsche Mittelwertverfahren 639 — K. Das Divisionsverfahren 640 — L. Weitere Verfahren 642	
IX. Gleichungen		644
§ 54	Die Einführung des Platzhalterbegriffs	644
§ 55	Die Erarbeitung des Gleichungsbegriffs	647
	A. Gleichheitsaussagen 647 — B. Aussageformen der Gleichheit und Ungleichheit 649	
§ 56	Das Rechnen mit Platzhaltern	651
	A. Prinzipien der Methode 651 — B. Die arithmetischen Grundgesetze im Körper 653 — C. Quadratische Formen 655	
§ 57	Das Verständnis der teigültigen Gleichungen und Ungleichungen	657
§ 58	Lösungsmethoden für Gleichungen	660
	A. Die Entwicklung von Gleichungsfolgen 660 — B. Modelle für Äquivalenzumformungen 662	
§ 59	Die Behandlung linearer Gleichungen	666
	A. Voraussetzungen 666 — B. Additive Äquivalenzumformungen 667 — C. Multiplikative Äquivalenzumformungen 671 — D. Definitionsbereich und Lösungsmenge 673	

§ 60 Die Behandlung von Bruchgleichungen und quadratischen Gleichungen	674
A. Bruchgleichungen 674 — B. Quadratische Gleichungen 675	
§ 61 Einige Bemerkungen zur Behandlung von Ungleichungen . .	677
A. Voraussetzungen 677 — B. Veranschaulichungsmöglichkeiten der Äquivalenzumformungen 679	
X. Anhang: Zahlenspiele und Zahlenkunststücke	684
XI. Literaturverzeichnis	692
XII. Verfasserverzeichnis	702
XIII. Sachverzeichnis	706