

# TABLE DES MATIÈRES

---

	Pages
PRÉFACE . . . . .	v
AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR . . . . .	xi

## PREMIÈRE PARTIE

### ÉTUDE ALGÈBRE DE LA GÉOMÉTRIE ET DE LA CINÉMATIQUE DANS L'ESPACE A $n$ DIMENSIONS

#### CHAPITRE PREMIER

##### FORMES LINÉAIRES

##### I. — *Les séries linéaires de points et leur représentation.*

§	1. — Séries linéaires de points . . . . .	1
§	2. — Séries complémentaires et composition des séries . . . . .	5
§	3. — Coordonnées plückériennes d'une $S_{p-1}$ . . . . .	7
§	4. — Le problème de la composition en coordonnées plückériennes . . . . .	12

##### II. — *Classification des formes bilinéaires et identité fondamentale.*

§	5. — Formes linéaires, symétrie, antisymétrie . . . . .	15
§	6. — Identité fondamentale . . . . .	20

##### III. — *Forme adjointe.*

§	7. — Polyèdres dérivés . . . . .	24
§	8. — Dérivées et adjointe . . . . .	30

#### CHAPITRE II

##### FORMES QUADRATIQUES

##### I. — *Normalisation des coordonnées.*

§	9. — Généralités. Surface fondamentale. Normalisation des coordonnées . . . . .	36
---	---	----

	Pages
§ 10. — Points conjugués et polyèdres normaux . . . . .	38
§ 11. — Normalisation des coordonnées plückériennes. Séries conjuguées. Séries orthogonales. . . . .	40
§ 12. — Sinus d'un $p$ -èdre et séries singulières . . . . .	44

II. — *Eléments de la géométrie non-euclidienne dans l'espace  $E_{n-1}$ .*

§ 13. — Notion de distance. . . . .	49
§ 14. — Résumé des propriétés de dualité . . . . .	52

III. — *Réduction des formes quadratiques.*

§ 15. — Formes réduites d'un polynôme quadratique. . . . .	54
§ 16. — Réduction simultanée de deux formes quadratiques . . . . .	58
§ 17. — Loi d'inertie. Théorème de Hermite . . . . .	60

### CHAPITRE III

#### THÉORIE DES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

I. — *Transformation linéaire et transformations dérivées.*

§ 18. — Interprétation géométrique; composition; modification d'une transformation par une autre. . . . .	64
§ 19. — Transformations dérivées de divers ordres . . . . .	68
§ 20. — Symétrie droite ou gauche des éléments des transformations dérivées . . . . .	70
§ 21. — Déterminants des transformations dérivées . . . . .	74

II. — *Forme canonique et transformation des formes quadratiques.*

§ 22. — Forme canonique d'une transformation linéaire . . . . .	76
§ 23. — Transformation linéaire d'une forme quadratique en une autre. . . . .	81

III. — *Transformations isométriques.*

§ 24. — Transformations isométriques ou automorphes. . . . .	84
§ 25. — Recherche des transformations automorphes correspondant à une forme quadratique donnée . . . . .	89
§ 26. — Quelques propriétés des isométries, mouvements et retournements . . . . .	93
§ 27. — Représentation paramétrique des transformations automorphes . . . . .	97
§ 28. — Représentation paramétrique d'une transformation composée . . . . .	101

	Pages
IV. — <i>Éléments de courbure d'une courbe de l'espace <math>E_{n-1}</math>.</i>	
§ 29. — Élément d'arc . . . . .	102
§ 30. — Formules de Frenet et éléments de courbure . . . . .	103
§ 31. — Quelques propriétés déduites des formules de Frenet . . . . .	107
§ 32. — Retour à l'espace ordinaire . . . . .	109

## DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE, THÉORIE DES DYNAMES.  
GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

## CHAPITRE IV

## GRANDEURS VECTORIELLES

I. — *Définitions.*

§ 33. — Généralités . . . . .	111
§ 34. — Composition des vecteurs libres. . . . .	118
§ 35. — Le produit intérieur . . . . .	121
§ 36. — Le produit extérieur . . . . .	126
§ 37. — Propriétés du produit extérieur. . . . .	128
§ 38. — Combinaison des symboles . . . . .	130

II. — *Applications géométriques.*

§ 39. — Quelques applications. . . . .	131
§ 40. — Changement des axes coordonnés. Transformations orthogonales. . . . .	137
§ 41. — Théorie des aires. Première esquisse de la théorie des moments . . . . .	142

## CHAPITRE V

## LES FIGURES FONDAMENTALES, NOTION DE DUALITÉ

I. — *Le trièdre.*

§ 42. — Généralités . . . . .	147
§ 43. — Le trièdre. Trigonométrie sphérique . . . . .	148

II. — *Coordonnées obliques.*

§ 44. — Composantes et projections . . . . .	151
§ 45. — Produit intérieur de deux vecteurs. . . . .	153

	Pages
§ 46. — Trièdres polaires, coordonnées contrevariantes et covariantes. . . . .	154
§ 47. — Propriétés dualistiques des coordonnées obliques . . .	158
§ 48. — Produit extérieur . . . . .	159
§ 49. — Généralisation . . . . .	161

### III. — Triangle et tétraèdre.

§ 50. — Le triangle . . . . .	162
§ 51. — Le tétraèdre. . . . .	166

### IV. — Coordonnées d'une droite.

§ 52. — Volume du tétraèdre . . . . .	171
§ 53. — Coordonnées d'un vecteur glissant. . . . .	172
§ 54. — Coordonnées d'une droite; première forme . . . . .	173
§ 55. — Coordonnées d'une droite; seconde forme. . . . .	174
§ 56. — Nouvelle expression du volume du tétraèdre. . . . .	178

## CHAPITRE VI

### GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

#### I. — Moment relatif et moment linéaire.

§ 57. — Moment relatif. . . . .	181
§ 58. — Moment linéaire . . . . .	185

#### II. — Coordonnées complexes de la droite.

§ 59. — Digression sur certaines quantités complexes. . . . .	187
§ 60. — Coordonnées complexes de la droite . . . . .	190

#### III. — Géométrie sphérique et géométrie réglée.

§ 61. — Identité de la géométrie réglée et de la géométrie ponctuelle sphérique. . . . .	193
§ 62. — Recticongruence . . . . .	194
§ 63. — Trigonométrie générale . . . . .	200

## CHAPITRE VII

### LES ÉLÉMENTS COTÉS. COMPOSITION, CENTRE DE GRAVITÉ

#### I. — Puissance mutuelle de deux éléments cotés en géométrie non-euclidienne de Riemann.

§ 64. — Généralité sur la géométrie non-euclidienne de Riemann . . . . .	202
§ 65. — Points, plans cotés. Droites cotées. . . . .	205

	Pages
66. — Puissance mutuelle de deux éléments cotés . . . . .	206
67. — Puissance mutuelle de deux systèmes chargés. Equivalence, réduction et composition . . . . .	207

II. — *Composition des éléments cotés en géométrie euclidienne.*

68. — Retour à la géométrie euclidienne . . . . .	210
69. — Composition des points massifs et des plans . . . . .	213
70. — Exceptions et compléments. Couple . . . . .	215
71. — Quelques propriétés du centre de gravité. Coordonnées barycentriques . . . . .	218

III. — *Cas particulier de la composition des points et des plans cotés.*

72. — Plans cotés passant par un même point . . . . .	223
73. — Points cotés sur la sphère . . . . .	224
74. — Plans cotés perpendiculaires à un plan fixe. Vecteurs glissants dans un même plan . . . . .	227
75. — Théorie géométrique des vecteurs glissants situés dans un même plan . . . . .	231

IV. — *Centre de gravité des corps continus.*

76. — Éléments de symétrie . . . . .	234
77. — Exemples. Théorème de Guldin . . . . .	236

## CHAPITRE VIII

### THÉORIE DES DYNAMES

I. — *Equivalence et composition.*

78. — Généralités . . . . .	245
79. — Equivalence . . . . .	247
80. — Composition . . . . .	249
81. — Couples . . . . .	253
82. — Réduction, axe central . . . . .	255

II. — *Théorie générale des moments.*

83. — Définitions . . . . .	260
84. — Moment linéaire d'un dynamisme . . . . .	262
85. — Distribution du moment linéaire . . . . .	264
86. — Corollaires . . . . .	266

	Pages
<i>III. — Complexe linéaire.</i>	
§ 87. — Droite de moment nul. Complexe linéaire. . . . .	269
§ 88. — Droites conjuguées . . . . .	275
<i>IV. — Réduction élémentaire des systèmes de forces.</i>	
§ 89. — Réduction d'un système de force par la composition élémentaire . . . . .	276
§ 90. — Réduction à des éléments particuliers. . . . .	279
<i>V. — Exemples servant à illustrer les théories générales.</i>	
§ 91. — Réduction des forces parallèles. . . . .	281
§ 92. — Exemples divers . . . . .	284

## CHAPITRE IX

### LE CYLINDROÏDE DE PLÜCKER

#### I. — Définitions.

§ 93. — Première définition . . . . .	291
§ 94. — Seconde définition . . . . .	295
§ 95. — Troisième définition . . . . .	296

#### II. — Propriétés.

§ 96. — Complexe de Ball . . . . .	300
§ 97. — Points et flèches symétriques relativement au cylindroïde. . . . .	303
§ 98. — Cylindroïdes orthogonaux et cylindroïdes complémentaires . . . . .	309
§ 99. — Cylindroïdes orthogonaux à deux cylindroïdes donnés. . . . .	312

## TROISIÈME PARTIE

### CINÉMATIQUE. ÉTUDE DES MOUVEMENTS FINIS

#### CHAPITRE X

##### ISOMÉTRIE. MOUVEMENTS ET RETOURNEMENTS.

#### I. — Représentation analytique des isométries.

§ 100. — Généralités. . . . .	315
§ 101. — Schémas orthogonaux . . . . .	318
§ 102. — Mouvements et retournements dans les espaces à une et deux dimensions . . . . .	322

	Pages
II. — <i>Transformations orthogonales à trois indéterminées.</i> <i>Isométrie sur une sphère fixe.</i>	
§ 103. — Formules de Rodrigues . . . . .	327
§ 104. — Relation entre les paramètres de Rodrigues et les coefficients de la transformation orthogonale . . . . .	331
§ 105. — Mouvements sur la sphère . . . . .	334
§ 106. — Retournement de la sphère sur elle-même . . . . .	337
III. — <i>Transformations isométriques dans l'espace à trois dimensions. Composition des mouvements.</i>	
§ 107. — Lemmés. . . . .	339
§ 108. — Mouvement hélicoïdal . . . . .	341
§ 109. — Construction des figures contraires . . . . .	342
§ 110. — Propositions sur la composition des translations et relations d'un solide . . . . .	343

## CHAPITRE XI

## THÉORIE DES QUATERNIONS

I. — *Définition des quaternions.*

§ 111. — Introduction . . . . .	352
§ 112. — Définitions . . . . .	353
§ 113. — Addition . . . . .	357
§ 114. — Multiplication. . . . .	359
§ 115. — Quaternions inverses et conjugués . . . . .	362
§ 116. — Vecteur considéré comme quaternion. . . . .	363

II. — *Forme quaternion de l'isométrie.*

§ 117. — Expression en quaternion des formules de Rodrigues. Transformée d'une opération . . . . .	364
§ 118. — Biquaternions. . . . .	367
§ 119. — Transformations isométriques linéaires de points, de plans et de droites. . . . .	371

## CHAPITRE XII

## GÉOMÉTRIE DES CORPS SOLIDES.

I. — *Géométrie de la figure sphérique.*

§ 120. — Analogie entre la géométrie de Riemann et la cinématique d'une figure sphérique se mouvant sur sa sphère . . . . .	378
---	-----

	Pages
§ 121. — La couronne et le couronoïde, éléments corrélatifs de la droite et du plan . . . . .	381
II. — <i>Géométrie générale des corps solides.</i>	
§ 122. — Géométrie des corps solides . . . . .	386
§ 123. — Corps solides cotés . . . . .	390
§ 124. — Systèmes linéaires de corps solides . . . . .	391

### CHAPITRE XIII

#### TRANSFORMATIONS ORTHOGONALES A QUATRE INDÉTERMINÉES

##### I. — *Trois aspects du schéma quaternaire.*

§ 125. — Représentation de la transformation orthogonale quaternaire . . . . .	396
§ 126. — Relations algébriques entre les paramètres des trois formes d'un schéma quaternaire . . . . .	402
§ 127. — Relations du schéma quaternaire et des deux formes ternaires correspondantes. . . . .	406
§ 128. — Le schéma quaternaire exprimé en fonction des schémas ternaires ; valeur de certains déterminants. . . . .	410

##### II. — *Recherche des éléments invariants.*

§ 129. — Equation en $s$ . . . . .	414
§ 130. — Tétravecteurs et Hexavecteurs . . . . .	420
§ 131. — Recherche des hexavecteurs invariants . . . . .	425

## QUATRIÈME PARTIE

### CINÉMATIQUE.

#### ÉTUDE DES MOUVEMENTS INFINITÉSIMAUX

### CHAPITRE XIV

#### VITESSE ET ACCÉLÉRATION

##### I. — *Éléments de courbure du cône, de la courbe gauche et de la surface réglée.*

§ 132. — Vitesse et accélération considérées comme quantités scalaires. . . . .	429
§ 133. — Courbure géodésique du cône . . . . .	433
§ 134. — Courbure et torsion d'une courbe gauche, formules de Frenet . . . . .	436

§	135. — Quelques propriétés des courbes gauches . . . . .	439
§	136. — Extension à la géométrie des surfaces réglées . . . . .	442
§	137. — Exemples . . . . .	445

## II. — *Vitesse et accélération, grandeurs vectorielles.*

§	138. — La vitesse . . . . .	451
§	139. — L'accélération . . . . .	455
§	140. — Généralisation, vitesse et accélération d'un dynamo . . . . .	459
§	141. — Projection et composition des mouvements . . . . .	463

## III. — *Exemples de mouvements.*

§	142. — Mouvement parabolique de Galilée, problème du tir . . . . .	465
§	143. — Mouvement harmonique elliptique . . . . .	470
§	144. — Mouvement rectiligne harmonique . . . . .	474
§	145. — Figures de Lissajous . . . . .	478

## IV. — *Accélération centrale.*

§	146. — Propriété des moments, loi des aires . . . . .	479
§	147. — Mouvement planétaire . . . . .	485
§	148. — Le problème de Képler . . . . .	491

# CHAPITRE XV

## THÉORIE DES MOUVEMENTS RELATIFS ET TRANSFORMATION DE LAGRANGE

### I. — *Mouvements relatifs.*

§	149. — Mouvement de translation . . . . .	494
§	150. — Mouvement quelconque . . . . .	496
§	151. — Exemples . . . . .	501

### II. — *Transformation de Lagrange.*

§	152. — Composantes et projections de la vitesse; mouvements sur une surface . . . . .	509
§	153. — Composantes et projections de l'accélération . . . . .	514
§	154. — Généralisation, mouvement dépendant de $n$ paramètres . . . . .	515
§	155. — Quelques remarques d'un ordre général . . . . .	517

### III. — *Application de la transformation de Lagrange.*

§	156. — Expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires et cylindriques . . . . .	520
---	---	-----

	Pages
157. — Composition des accélérations . . . . .	522
158. — Application à la théorie des surfaces, courbes géodésiques . . . . .	525

## CHAPITRE XVI

### MOUVEMENT INSTANTANÉ D'UN CORPS SOLIDE

#### I. — *Distribution des vitesses.*

159. — Définition du mouvement instantané . . . . .	528
160. — Mouvement instantané d'un point, d'un plan et d'une droite du corps . . . . .	529
161. — Mouvement hélicoïdal . . . . .	532
162. — Mouvement d'un plan sur un plan et d'une lamelle sphérique sur sa sphère . . . . .	534
163. — Passage du mouvement autour d'un point fixe au mouvement hélicoïdal . . . . .	537
164. — Détermination du mouvement instantané en fonction de certains éléments . . . . .	539
165. — Composition des mouvements instantanés ; exemples.	540
166. — Rapport entre les vitesses d'un point, d'un plan et d'une droite qui appartiennent à une droite donnée . . . . .	542

#### II. — *Distribution des accélérations.*

167. — Mouvement instantané du second ordre . . . . .	544
168. — Mouvement d'un plan sur un plan . . . . .	546
169. — Mouvement d'une lamelle sphérique sur sa sphère . . . . .	547

#### III. — *Passage du mouvement fini au mouvement infinitésimal.*

170. — Expression du mouvement instantané en fonction des coefficients de la transformation isométrique . . . . .	550
171. — Expression de la rotation instantanée en fonction des angles d'Euler . . . . .	553
172. — Expression du mouvement instantané en quaternions.	556

#### IV. — *Passage du mouvement infinitésimal au mouvement fini.*

173. — Aspect du problème de l'intégration, résolution dans un cas particulier . . . . .	559
174. — Intégration dans le cas général . . . . .	561
175. — Intégration des équations du mouvement sous forme quaternion . . . . .	566

	Pages
§ 176. — Le problème de la détermination d'une surface réglée à partir de ses éléments intrinsèques : arc et courbure. . . . .	571

## CHAPITRE XVII

## THÉORIE DU ROULEMENT ET APPLICATIONS

I. — *Roulement.*

177. — Définition du roulement. . . . .	573
178. — Propriété de transitivité du roulement . . . . .	577
179. — Surface roulante et surface base ; proposition fondamentale . . . . .	578
180. — Proposition réciproque . . . . .	581
181. — Roulement de deux courbes sphériques ou planes . . . . .	583
182. — Retour au cas général ; la formule de Savary . . . . .	586
183. — Nouvelle étude du roulement de deux courbes sphériques . . . . .	590

II. — *Applications.*

184. — Stations et rétrogradations des planètes. . . . .	594
185. — Mouvement épicycloïdal ; mouvement de la lune ; précession des équinoxes. . . . .	598
186. — Equation différentielle polaire des épicycloïdes . . . . .	601
187. — Les épicycloïdes planes, nouvelles propriétés . . . . .	603
188. — Bielle et manivelle . . . . .	607
189. — Le joint de Cardan et les cames . . . . .	609
190. — Les engrenages . . . . .	612
191. — Théorie du planimètre d'Amsler . . . . .	615