

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Généralités sur les groupes</b>	<b>13</b>
1 Rappel de quelques définitions . . . . .	13
2 Exemples de groupes finis . . . . .	14
2.1 Groupe cyclique d'ordre $n$ . . . . .	14
2.2 Groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	14
2.3 Groupe diédral . . . . .	15
2.4 Autres exemples . . . . .	15
3 Exemples de groupes infinis . . . . .	15
4 Actions de groupes, classes de conjugaison . . . . .	17
5 Références . . . . .	18
6 Exercices . . . . .	18
<b>2 Représentations des groupes finis</b>	<b>21</b>
1 Représentations . . . . .	21
1.1 Généralités . . . . .	21
1.2 Représentations irréductibles . . . . .	23
1.3 Somme directe de représentations . . . . .	23
1.4 Opérateurs d'entrelacement, lemme de Schur . . . . .	24
2 Caractères et relations d'orthogonalité . . . . .	26
2.1 Fonctions sur un groupe, coefficients matriciels . . . . .	26
2.2 Caractère d'une représentation, relations d'orthogonalité . . . . .	27
2.3 Table de caractères . . . . .	30
2.4 Application à la décomposition des représentations . . . . .	31
3 La représentation régulière . . . . .	32
3.1 Définition . . . . .	32
3.2 Caractère de la représentation régulière . . . . .	33
3.3 Décomposition en composantes isotypiques . . . . .	33
3.4 Base de l'espace vectoriel des fonctions centrales . . . . .	34

4	Opérateurs de projection . . . . .	36
5	Représentations induites . . . . .	37
5.1	Définition . . . . .	37
5.2	Interprétation géométrique . . . . .	38
6	Références . . . . .	38
7	Exercices . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Représentations des groupes compacts</b>	<b>45</b>
1	Groupes compacts . . . . .	45
2	Mesure de Haar . . . . .	46
3	Représentations des groupes topologiques. Lemme de Schur . . . . .	48
3.1	Généralités . . . . .	48
3.2	Coefficients d'une représentation . . . . .	48
3.3	Opérateurs d'entrelacement . . . . .	49
3.4	Opérations sur les représentations . . . . .	50
3.5	Lemme de Schur . . . . .	50
4	Représentations des groupes compacts . . . . .	51
4.1	Complète réductibilité . . . . .	51
4.2	Relations d'orthogonalité . . . . .	52
5	Résumé du chapitre 3 . . . . .	55
6	Références . . . . .	56
7	Exercices . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Groupes et algèbres de Lie</b>	<b>59</b>
1	Algèbres de Lie . . . . .	59
1.1	Définition et exemples . . . . .	59
1.2	Morphismes . . . . .	61
1.3	Relations de commutation, constantes de structure . . . . .	61
1.4	Formes réelles . . . . .	61
1.5	Représentations d'algèbres de Lie . . . . .	62
2	Rappels sur l'application exponentielle . . . . .	63
3	Sous-groupes à un paramètre de $GL(n, \mathbb{K})$ . . . . .	66
4	Groupes de Lie . . . . .	68
5	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie . . . . .	69
6	Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie . . . . .	72
6.1	Différentielle d'un morphisme de groupes de Lie . . . . .	72
6.2	Différentielle d'une représentation de groupe de Lie . . . . .	74
6.3	La représentation adjointe . . . . .	76
7	Références . . . . .	77
8	Exercices . . . . .	78

<b>5</b>	<b>Les groupes de Lie <math>SU(2)</math> et <math>SO(3)</math></b>	<b>83</b>
1	Les algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ . . . . .	83
1.1	Bases de $\mathfrak{su}(2)$ . . . . .	83
1.2	Bases de $\mathfrak{so}(3)$ . . . . .	85
1.3	Bases de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . . . . .	86
2	Le morphisme de revêtement de $SU(2)$ sur $SO(3)$ . . . . .	86
2.1	Le groupe de Lie $SO(3)$ . . . . .	86
2.2	Le groupe de Lie $SU(2)$ . . . . .	88
2.3	Projection de $SU(2)$ sur $SO(3)$ . . . . .	90
3	Références . . . . .	91
4	Exercices . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Les représentations de <math>SU(2)</math> et <math>SO(3)</math></b>	<b>93</b>
1	Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . . . . .	93
1.1	Les représentations $D^j$ . . . . .	93
1.2	Opérateur de Casimir . . . . .	96
1.3	Hermiticité des opérateurs $J_3$ et $J^2$ . . . . .	96
2	Représentations de $SU(2)$ . . . . .	98
2.1	Les représentations $D^j$ . . . . .	98
2.2	Caractères des représentations $D^j$ . . . . .	101
3	Représentations de $SO(3)$ . . . . .	102
4	Références . . . . .	102
5	Exercices . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Les harmoniques sphériques</b>	<b>105</b>
1	Rappel sur $L^2(S^2)$ . . . . .	105
2	Les polynômes harmoniques . . . . .	106
2.1	Représentations de groupes dans des espaces de fonctions . . . . .	106
2.2	Les espaces de polynômes harmoniques . . . . .	106
2.3	Représentations de $SO(3)$ dans les espaces de polynômes harmoniques . . . . .	107
3	Les harmoniques sphériques . . . . .	109
3.1	Représentations de $SO(3)$ dans les espaces d'harmoniques sphériques . . . . .	110
3.2	Opérateur de Casimir . . . . .	111
3.3	Fonctions propres de l'opérateur de Casimir . . . . .	111
3.4	Bases des espaces d'harmoniques sphériques . . . . .	112
3.5	Formules explicites . . . . .	115
4	Références . . . . .	116
5	Exercices . . . . .	116

<b>8</b>	<b>Les représentations de SU(3) et les quarks</b>	<b>119</b>
1	Rappels sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ , représentations de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et de SU(3) . . . . .	119
1.1	Rappels sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ . . . . .	119
1.2	Cas de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ . . . . .	120
1.3	Les bases $(I_3, Y)$ et $(I_3, T_8)$ de $\mathfrak{h}$ . . . . .	122
1.4	Représentations de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ et de SU(3) . . . . .	122
2	Représentation adjointe, racines . . . . .	122
3	Représentation standard et sa contragrédiente . . . . .	124
3.1	Représentation standard (fondamentale) . . . . .	124
3.2	Contragrédiente de la représentation standard . . . . .	125
4	Poids maximal d'une représentation de dimension finie . . . . .	126
4.1	Poids maximal . . . . .	126
4.2	Les poids comme combinaisons linéaires des $\lambda_i$ . . . . .	127
4.3	Représentations de dimension finie, poids . . . . .	128
4.4	Autre exemple : la représentation <b>6</b> . . . . .	129
4.5	Encore un exemple : la représentation <b>10</b> . . . . .	130
5	Produits tensoriels de représentations . . . . .	131
6	« The eightfold way » . . . . .	134
6.1	Baryons ( $B = 1$ ) . . . . .	135
6.2	Mésons ( $B = 0$ ) . . . . .	136
6.3	Résonances baryoniques . . . . .	136
7	Les quarks et les antiquarks . . . . .	137
8	Références . . . . .	138
9	Exercices . . . . .	139

**Problèmes corrigés** **141**

1	Restriction d'une représentation à un groupe fini . . . . .	141
2	Le groupe O(2) . . . . .	143
3	Représentations du groupe diédral et du groupe des quaternions . . . . .	146
4	Représentations de SU(2) et de $\mathfrak{S}_3$ . . . . .	156
5	Groupes pseudo-unitaire et pseudo-orthogonal . . . . .	160
6	Représentations irréductibles de $SU(2) \times SU(2)$ . . . . .	166
7	Opérateurs de projection . . . . .	173
8	Symétries des molécules de fullerènes . . . . .	181
9	Coefficients matriciels et harmoniques sphériques . . . . .	191

**Bibliographie** **199**

**Index** **201**