

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>8</b>
2.1	Optionstypen . . . . .	8
2.2	Arbitrage . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Die Binomialmethode</b>	<b>18</b>
3.1	Binomialbäume . . . . .	18
3.1.1	Ein-Perioden-Modell . . . . .	18
3.1.2	$n$ -Perioden-Modell . . . . .	20
3.2	Brownsche Bewegung und ein Aktienkursmodell . . . . .	22
3.2.1	Stochastische Grundbegriffe . . . . .	23
3.2.2	Stochastische Prozesse und Brownsche Bewegung . . . . .	28
3.2.3	Ein Aktienkursmodell . . . . .	29
3.3	Vom Binomialbaum zur Black-Scholes-Formel . . . . .	31
3.4	Binomialverfahren . . . . .	33
3.4.1	Der Algorithmus . . . . .	35
3.4.2	Implementierung in MATLAB . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Die Black-Scholes-Gleichung</b>	<b>46</b>
4.1	Stochastische Differentialgleichungen von Itô . . . . .	46
4.2	Black-Scholes-Formeln . . . . .	51
4.2.1	Modellvoraussetzungen . . . . .	52
4.2.2	Herleitung der Black-Scholes-Gleichung . . . . .	54
4.2.3	Lösung der Black-Scholes-Gleichung . . . . .	56
4.3	Numerische Auswertung der Black-Scholes-Formeln . . . . .	63
4.3.1	Rationale Bestapproximation und nichtlineare Ausgleichs- rechnung . . . . .	63
4.3.2	Kubische Hermite-Interpolation . . . . .	68
4.4	Kennzahlen und Volatilität . . . . .	73
4.4.1	Dynamische Kennzahlen . . . . .	73
4.4.2	Historische und implizite Volatilität . . . . .	75
4.5	Erweiterungen der Black-Scholes-Gleichung . . . . .	79
4.5.1	Kontinuierliche Dividendenzahlungen . . . . .	79

4.5.2	Diskrete Dividendenzahlungen . . . . .	81
4.5.3	Zeitabhängige Parameter . . . . .	84
4.5.4	Mehrere Basiswerte . . . . .	87
4.5.5	Weitere Verallgemeinerungen . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Die Monte-Carlo-Methode</b>	<b>97</b>
5.1	Grundzüge der Monte-Carlo-Simulation . . . . .	97
5.2	Pseudo-Zufallszahlen . . . . .	103
5.2.1	Gleichverteilte Zufallszahlen . . . . .	104
5.2.2	Normalverteilte Zufallszahlen . . . . .	108
5.2.3	Korreliert normalverteilte Zufallszahlen . . . . .	112
5.2.4	Zahlenfolgen niedriger Diskrepanz . . . . .	114
5.3	Numerische Integration stochastischer Differentialgleichungen . . . . .	120
5.3.1	Starke und schwache Konvergenz . . . . .	120
5.3.2	Stochastische Taylorentwicklungen . . . . .	125
5.3.3	Stochastische Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	129
5.3.4	Systeme stochastischer Differentialgleichungen . . . . .	130
5.4	Varianzreduktion . . . . .	134
5.5	Monte-Carlo-Simulation einer asiatischen Option . . . . .	137
<b>6</b>	<b>Numerische Lösung parabolischer Differentialgleichungen</b>	<b>149</b>
6.1	Partielle Differentialgleichungen für asiatische Optionen . . . . .	149
6.1.1	Typen asiatischer Optionen . . . . .	149
6.1.2	Modellierung asiatischer Optionen . . . . .	150
6.2	Methode der Finiten Differenzen . . . . .	154
6.2.1	Diskretisierung . . . . .	155
6.2.2	Existenz und Eindeutigkeit diskreter Lösungen . . . . .	159
6.2.3	Konsistenz und Stabilität . . . . .	160
6.2.4	Konvergenz . . . . .	163
6.2.5	Zusammenhang mit der Binomialmethode . . . . .	167
6.3	Beispiel: Power-Optionen . . . . .	170
6.4	Vertikale Linienmethode . . . . .	175
6.4.1	Steife Systeme . . . . .	176
6.4.2	Ein Modellproblem nach Prothero und Robinson . . . . .	177
6.4.3	A-Stabilität . . . . .	179
6.4.4	Der inhomogene Fall . . . . .	180
6.4.5	Die MATLAB-Funktion <code>ode23s</code> . . . . .	183

6.5	Beispiel: Basket-Optionen . . . . .	188
<b>7</b>	<b>Numerische Lösung freier Randwertprobleme</b>	<b>198</b>
7.1	Amerikanische Optionen . . . . .	198
7.2	Das Hindernisproblem . . . . .	203
7.2.1	Approximation durch Finite Differenzen . . . . .	207
7.2.2	Approximation durch Finite Elemente . . . . .	207
7.3	Numerische Diskretisierung . . . . .	209
7.3.1	Transformation des Komplementaritätsproblems . . . . .	210
7.3.2	Approximation mittels Finiten Differenzen . . . . .	210
7.3.3	Das Projektions-SOR-Verfahren . . . . .	211
7.3.4	Implementierung in MATLAB . . . . .	216
<b>8</b>	<b>Einige weiterführende Themen</b>	<b>224</b>
8.1	Strafmethoden für amerikanische Optionen . . . . .	224
8.2	Volatilitätsmodelle . . . . .	230
8.2.1	Lokale und implizite Volatilitäten . . . . .	231
8.2.2	Rekonstruktion der lokalen Volatilitätsfläche . . . . .	233
8.2.3	Stochastische Volatilität und Positivität . . . . .	237
8.2.4	Duplikationsstrategie . . . . .	238
8.3	Zinsderivate . . . . .	241
8.3.1	Formulierung des Modellproblems . . . . .	243
8.3.2	Bond-Preis unter Cox-Ingersoll-Ross-Dynamik . . . . .	245
8.3.3	Kalibrierung des Modells an Marktdaten . . . . .	247
8.3.4	Ausgleichsspline . . . . .	248
8.3.5	Zur numerischen Lösung des Modellproblems . . . . .	258
8.4	Wetterderivate . . . . .	259
8.4.1	Temperaturindizes . . . . .	260
8.4.2	Temperaturmodelle . . . . .	264
8.4.3	Bewertungsmodelle . . . . .	267
8.4.4	Implementierung in MATLAB . . . . .	271
<b>9</b>	<b>Eine kleine Einführung in MATLAB</b>	<b>276</b>
9.1	Grundlagen . . . . .	276
9.2	Toolboxen . . . . .	283
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>288</b>
	<b>Index</b>	<b>297</b>