

	<u>Seite</u>
<u>EINLEITUNG</u>	1
<u>KAPITEL I: EXPLIKATION DER PROBLEMSTELLUNG</u>	
1. Bemerkungen zur Bedeutung der Mathematik im Entwicklungsprozeß der Gesellschaft	4
1.1. Die gesellschaftsbezogene Rolle der Mathematik	4
1.1.1. Allgemeine Entwicklungstendenzen im Bereich der Mathematik	4
a) Zunahme von Komplexität der mathematischen Theorien parallel zum Anwachsen gesellschaftlicher Organisationsprobleme	4
b) Theoriebildung auf zunehmend höherem Abstraktionsniveau und wachsende Distanz der mathematischen Aussagen zur umweltlich gegebenen Realität	5
1.1.2. Die Wechselwirkung zwischen gesellschaftlicher Realität und mathematischer Theorie	8
a) Zum Verhältnis von Erfahrung und Erkenntnis im Bereich der Mathematik	8
b) Abstraktion, das Schema mathematischer Theoriebildung	9
1.1.3. Die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik	12
a) Von der Benutzung der Mathematik	12
b) Zunehmende Neigung zur Verwendung mathematischer Methoden	14
c) Zur gesellschaftlichen Dimension der Verwendung von Mathematik	15
1.2. Mathematik als Instrument der individuellen Bildung	16
1.2.1. Die individuelle Aneignung von Mathematik	16
a) Aspekte eines Bildungsbegriffs	16
b) Implikationen der Aneignung von Mathematik	19
1.2.2. Die Rolle der Schule bei der Aneignung von Mathematik	21

	<u>Seite</u>
2. Fachspezifische Faktoren der Vermittlung von Mathematik	22
2.1. Präzisierung	22
2.2. Aspekte der Mathematik als Wissenschaft	23
2.3. Didaktische Orientierungen	24
a) Strukturorientierung	25
b) Genetische Orientierung	26
c) Mathematisierung	26
2.4. Bemerkungen zu allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts	27
a) Förderung des Anschauungsvermögens	27
b) Schulung der logischen Denkfähigkeit	27
c) Übung wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens	28
3. Problemlösen, ein wesentliches Element des Mathematikunterrichts	29
3.1. Die Rolle des Problemlösens im Mathematikunterricht	29
3.2. Vermittlung von Problemlösefähigkeiten - eine mathematikdidaktische Hauptaufgabe	31
3.2.1. Zur Situation des Problemlösens im Unterricht	31
3.2.2. Folgerungen zur didaktischen Orientierung	33
3.3. Problemlösung im Mathematikunterricht nach den Richtlinien und Lehrplänen des Landes Nordrhein-Westfalen	34
3.4. Das Programm dieser Arbeit	36

KAPITEL II: MATHEMATIK ALS PROBLEMLÖSUNG

1. Zum Verständnis von Mathematik als Problemlösung	38
1.1. Grundelemente mathematischer Aktivität	38
1.1.1. Bildung von Begriffen	38
a) Mathematische Begriffsbildung	38
b) Wissenschaftstheoretische Klärung	39
c) Psychologische Aspekte der Begriffsbildung	40
1.1.2. Organisation von Informationen	43
1.1.3. Zur Problemlösung	44
a) Problemdarstellungen in der Mathematik	44
b) Umrisse von psychologischen Aspekten des Problemlösens	46
1.2. Entwurf eines integrierenden Konzeptes	48
2. Allgemeines Strukturmodell für Problemlösen in einem erweiterten Sinne	49
2.1. Skizzierung der Grundzüge vorliegender theoretischer Ansätze	50
2.1.1. Die Bildung von Begriffen durch Abstraktion	50
a) Die formale Struktur des Abstraktionsprozesses	50
b) Zum psychologischen Verlauf des Abstraktionsprozesses	51
2.1.2. Organisation von Informationen	53
a) Zum Begriff der Information in der Kybernetik	53
b) Redundanzbildung	56
c) Das Prozeßschema	59
2.1.3. Zu gestalttheoretischen Aspekten des Problemlösens	59
a) Problem und Lösung	59
b) Der Prozeß der Lösungsfindung	60
c) Schematische Darstellung des Problemlöseprozesses	61

	<u>Seite</u>
2.2. Grundzüge eines allgemeinen Strukturmodells	62
2.2.1. Formale Beschreibung des globalen Prozeßverlaufs	62
2.2.2. Diskussion der Bedeutung der charakteristischen Strukturelemente	65
a) Die Operationen (Phasen) des Prozeßverlaufs	65
b) Die Zustände des Prozesses	68
2.2.3. Zusammenfassung	70
3. Zur Rolle der allgemeinen Heuristik	71

### KAPITEL III: DIE ROLLE DER HEURISTIK IM MATHEMATIKUNTERRICHT

1. Plausibles und demonstratives Schließen in der Mathematik	73
1.1. Phasen des plausiblen und demonstrativen Schließens	73
1.1.1. Zum Beitrag Georg Pólyas zur mathematischen Heuristik	73
1.1.2. Das Zusammenwirken der Methoden des plausiblen und des demonstrativen Schließens	74
1.1.3. Plausibles und demonstratives Schließen als Momente des Problemlösungsprozesses	75
1.2. Die "Logik" des plausiblen Schließens	76
1.2.1. Plausibles Schließen und didaktische Induktion	76
1.2.2. Schemata des plausiblen Schließens	79
1.2.3. Anmerkungen zum Charakter des plausiblen Schließens	84
2. Die didaktische Bedeutung der mathematischen Heuristik	85
2.1. Kreativitätselemente im Mathematikunterricht	85
2.1.1. Lernen und Kreativität	85
2.1.2. Phasen kreativer Situationen	88
2.2. Zum intuitiven Denken	90
2.2.1. Denken: Kreativ - intuitiv	90

	<u>Seite</u>
2.2.2. Intuition im produktiven Denken	92
2.2.3. Stufen der Intuition	94
2.2.4. Folgerungen zur Frage der unterrichtlichen Kreativitätsförderung	97
2.3. Die Rolle der Heuristik im Lernprozeß	98
2.3.1. Heuristik im globalen Verlauf des Lernprozesses	98
2.3.2. Ein Postulat der heuristischen Methode für den Unterricht	100
3. Aspekte der Heuristik	101
3.1. Heuristik als Wissenschaft	101
3.2. Heuristik in der Methodologie der Mathematik	102
i) Das Schema 'Descartes'	102
ii) Vermuten, Beweisen und Widerlegen (nach I. Lakatos)	104
3.3. Komponenten einer heuristischen Situation im Mathematikunterricht	109
3.3.1. Die komplexe Situation	109
3.3.2. Die Themenzentrierung der Problemsituation	110
3.3.3. Die pädagogisch-psychologische Komponente	110
3.3.4. Die soziale Organisation in der Problemsituation	111
3.3.5. Medien im Problemlöseprozeß	113
3.4. Heuristik in pragmatischer Reduktion	114
3.4.1. Charakter der Reduktion	114
3.4.2. Forderungen an eine Heuristik im Unterricht	115
3.4.3. Zur Anwendungsproblematik heuristischer Strategien	116
4. Heuristische Strategien im Mathematikunterricht	117
4.1. Zum Verhältnis von Problem und heuristischer Strategie	117
4.1.1. Ein formaler Aspekt	117

	<u>Seite</u>
4.1.2. Ein Bezug zwischen heuristischer Strategie und Lösung des Problems hinsichtlich der situativen Logik	118
4.1.3. Heuristisch-intuitive Verwendung von rational-analytisch erworbenen Schemata	120
4.1.4. Die Komplementarität von Problemsituation und heuristischer Strategie	121
4.2. Ein systematischer Überblick über heuristische Strategien	122
4.2.1. Präzisierung der Problembeschreibung	122
4.2.2. Eine Einteilung heuristischer Strategien	125
4.2.3. Die Transformationsmethode in der Mathematik	126
4.2.4. Reduktion und Analogie als Klassifikationskategorien	128
4.2.5. Begriffsklärungen: Analogie, Induktion	129
4.2.6. Weitere heuristische Strategien in der Mathematik	130
4.3. Die Verwendung heuristischer Strategien im Mathematikunterricht der Schule	131
4.3.1. Gesichtspunkte für eine methodische Verwendung heuristischer Strategien	131
4.3.2. Zur Thematisierung der Heuristik im Unterricht	133
4.3.3. Auswahl heuristischer Strategien für den Mathematikunterricht der Schule	135

KAPITEL IV: DIE VERWENDUNG HEURISTISCHER TECHNIKEN - EINE METHODISCHE LEITLINIE FÜR DEN MATHEMATIKUNTERRICHT IN DER SCHULE

1. Zur Konkretisierung eines heuristikorientierten Konzeptes für den Mathematikunterricht in der Schule	137
1.1. Die heuristische Struktur als didaktische Leitvorstellung	137
1.1.1. Mathematische Analyse	137
a) Strukturorientierte Analyse	138
b) Heuristische Analyse	139

1.1.2.	Die heuristische Struktur eines Themenbereichs	139
	a) Begriffsklärung: Heuristische Struktur	139
	b) Die Verwendung der heuristischen Struktur als orientierende Leitlinie im didaktischen Konzept	140
1.2.	Faktoren der Unterrichtsgestaltung	141
1.2.1.	Zur unterrichtlichen Darstellung eines Themenbereichs	141
1.2.2.	Kreativität fördernde Bedingungen	142
1.3.	Interventionen in den Lernverlauf	144
	a) Ausgliederung von Teilproblemen	145
	b) Einbringung von Teilordnungen (Superzeichen)	145
2.	Analyse eines Unterrichtsabschnittes über Flächen- und Raummae elementarer Figuren in Orientierung an heuristischen Gesichtspunkten	146
2.1.	Bemerkungen zur Thematik	146
2.2.	Die heuristische Struktur des Themenbereichs	147
SCHLUSSBEMERKUNGEN		152
LITERATURVERZEICHNIS		154