

Inhalt

Vorwort	1
I. Sachinformationen zur Satzgruppe des Pythagoras	
A. Die Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck, ihre Umkehrung und ihre logische Abhängigkeit voneinander	8
1. Formulierung der Sätze	8
a) Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck	8
b) Die zur "Satzgruppe des Pythagoras" gehörenden Sätze	9
2. Die Kehrsätze zu (P), (K) und (H)	11
a) Eine Vorbemerkung	11
b) Der Kehrsatz zu (P)	12
c) Der Kehrsatz zu (K)	12
d) Der Kehrsatz zu (H)	13
3. Zur gegenseitigen logischen Abhängigkeit der Sätze (P), (K) und (H)	14
a) Die logische Gleichwertigkeit von (P) und (K)	14
b) Die logische Beziehung zwischen (P) und (H)	25
c) Die logische Beziehung zwischen (K) und (H)	16
B. Beweise für die Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	19
1. Euklidische Methode	20
2. Abbildungsgeometrische Methode	22
a) Beweis des Kathetensatzens mit Schrägspiegelung und Scherung	22
b) Beweis des Höhensatzes mit Hilfe von drei Scherungen	23
3. Zerlegungsbeweise	24
a) Das Prinzip der Zerlegungsgleichheit	24
b) Einige Zerlegungsbeweise für den Pythagorassatz	25
c) Ein Zerlegungsbeweis für den Kathetensatz	28
d) Hinweis auf Spezialfälle, in welchen geeignete Zerlegungen des Höhenquadrats zum Höhensatz führen	29
e) Zwei vollständige Zerlegungsbeweise für (P)	31

II

4.	Ergänzungsbeweise	37
a)	Das Prinzip der Ergänzungsgleichheit	37
b)	Ein Ergänzungsbeweis für (H)	37
c)	Ein Ergänzungsbeweis für (K)	38
d)	Einige Ergänzungsbeweise für (P)	39
5.	Hinweis auf Parkettierungen als Beweisfiguren	42
6.	Arithmetische Beweise	43
a)	Einige arithmetische Beweise für (P)	43
b)	Ein arithmetischer Beweis für (H)	47
c)	Hinweis auf einen arithmetischen Beweis für (K)	48
7.	Beweise mit Hilfe der Ähnlichkeitsbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck	49
a)	Ähnlichkeitsbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck	49
b)	(H) und (K) als Folgerung aus den Ähnlichkeitsbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck	50
c)	(P) als Folgerung aus den Ähnlichkeitsbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck	51
d)	Ein weiterer Ähnlichkeitsbeweis für (P)	52
8.	Vektorielle Beweise zu den Sätzen am rechtwinkligen Dreieck	53
a)	Das Skalarprodukt für Vektoren des \mathbb{R}^2 und seine Eigenschaften	53
b)	Zwei vektorielle Beweise für (K)	54
c)	Ein vektorieller Beweis für (H)	55
d)	Ein vektorieller Beweis für (P)	55
9.	Hinweis auf weitere Möglichkeiten zur Gewinnung der Sätze am rechtwinkligen Dreieck im Zusammenhang mit anderen mathematischen Sachverhalten	56
a)	Gewinnung der Sätze am rechtwinkligen Dreieck aus einem allgemeinen Projektionssatz	56
b)	(H), (K) und (P) als Folgerungen aus den Ähnlichkeitsbeziehungen am Kreis	59
c)	(P) als Folgerung aus dem Satz des PTOLEMÄUS	63
d)	Herleitung von (H) im Zusammenhang mit der Behandlung von Steigungsdreiecken bei Geraden	64
e)	Gewinnung der Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck im Zusammenhang mit Flächenverwandlungen	67

C. Spezialisierungen, Verallgemeinerungen und Analogien zu den Flächensätzen am rechtwinkligen Dreieck	68
1. Spezialisierungen	69
a) Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenmaßzahlen	69
b) Gleichschenklige - rechtwinklige Dreiecke	78
c) Hinweis auf interessante Spezialfälle von "fast-pythagoreischen Dreiecken"	79
d) Rechtwinklige Dreiecke mit 1 als Maßzahl der Hypotenuse	83
2. Verallgemeinerungen	84
a) Der Projektionssatz für Dreiecke als Verallgemeinerung von (K)	84
b) Eine Verallgemeinerung von (H)	85
c) Der Kosinussatz als Verallgemeinerung von (P)	86
d) Ein Quadratsummensatz als Verallgemeinerung	87
e) Der Satz des PAPPOS als Verallgemeinerung von (K) bzw. von (P)	88
f) Eine Verallgemeinerung von (P) auf ähnliche Figuren über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks	90
g) Ein Satz über die Diagonalen im Parallelogramm als Verallgemeinerung von (P)	92
h) Hinweis auf Möglichkeiten für Verallgemeinerungen zu den pythagoreischen Zahlentripeln	93
3. Analogien	108
a) Zum Begriff "Analogie"	108
b) Quader als räumliches Analogon zum Rechteck	109
c) Analogiebildungen zu den durch die Flächensätze gegebenen Möglichkeiten der Flächenverwandlung	110
d) Rechtwinkliges Tetraeder als räumliches Analogon zum rechtwinkligen Dreieck	112
e) Untersuchungen am vierdimensionalen rechtwinkligen "Tetraeder"	118
f) Versuch einer Verallgemeinerung auf das n-dimensionale rechtwinklige "Tetraeder"	123
g) Hinweis auf ein weiteres dreidimensionales Analogon zum rechtwinkligen Dreieck	124

IV

h)	Hinweis auf Analogisierungen im Zusammenhang mit den pythagoreischen Zahlentripeln	125
D.	Geschichtliche Informationen zu den Flächensätzen am rechtwinkligen Dreieck	128
1.	Hinweis auf vielfältige Belege für die frühe Kenntnis pythagoreischer Zahlentripel	128
a)	Pythagoreische Dreiecke in der megalithischen Architektur Westeuropas und Ägyptens	128
b)	Beispiele für früheste Verfahren zur Konstruktion pythagoreischer Zahlentripel	130
c)	Hinweis auf Aufgaben, die auf dem Hintergrund pythagoreischer Zahlentripel konzipiert wurden	134
2.	Beispiele für Aufgaben aus alter Zeit, zu deren Lösung der Pythagorassatz herangezogen wurde	135
a)	Berechnungen am Rechteck	135
b)	Berechnungen mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke	136
d)	Hinweis auf Anwendung des Pythagorassatzes in der Astronomie	141
3.	Hinweise auf früheste Formulierungen des Pythagorassatzes und Begründungen	142
a)	Hinweis auf unterschiedliche Methoden	142
b)	Ein altindischer Beweis des Pythagorassatzes	143
c)	Der Sonderfall der Verdopplung bzw. Halbierung eines Quadrats	143
d)	Der Pythagorassatz im altchinesischen Kalenderwerk "Chou Pei Suan Ching"	144
e)	Der Beweis des Pythagorassatzes bei den Griechen	145
4.	Die Hypothese von B. L. van der WAERDEN	146
5.	Der Pythagorassatz in Mittelalter und Neuzeit	146
a)	Hinweis auf die geschichtliche Entwicklung	146
b)	Der Pythagorassatz im Mittelalter	147
c)	Hinweis auf die große Anzahl heute bekannter Beweise für den Pythagorassatz	148
d)	Zur Verwendung der Pythagorasfigur in unserer Zeit	148
e)	Pythagoras und "Science fiction"	148

II.	Bemerkungen zum unterrichtlichen Vorgehen: Der Einstieg	
A.	Eine Vorbemerkung zum Einstieg in den Themenkreis "Satzgruppe des Pythagoras"	150/
B.	Möglichkeiten des Einstiegs über den Kathetensatz	152
1.	Vorüberlegungen	152
2.	Die "Quadratur des Rechtecks" als Ausgangsproblem	153
a)	Ein Probiervverfahren mit Hilfe von Scherungen	153
b)	Ein weiterer konstruktiver Zugang zum Kathetensatz	171
c)	Ein Weg zur Rechteckquadratur (und damit wieder zum Kathetensatz) mit Hilfe der Lösung der Umkehraufgabe	172
3.	Experimente mit dem Ziel, den Kathetensatz zu entdecken	176
a)	Ein Puzzle als Zugang zum Kathetensatz	176
b)	Ein "Kathetensatz-Parkett"	178
c)	Auffinden des Kathetensatzes aufgrund von Beob- achtungen an einem umfangreichen Beispielvorrat	182
4.	Hinweis auf einige Möglichkeiten, den Kathe- tensatz als "Abfallprodukt" vorher behandelte mathematischer Sachverhalte zu gewinnen	186
a)	Erinnerung an derartige Möglichkeiten	186
b)	Einige kritische Bemerkungen	186
c)	Einige fachdidaktische Prinzipien und ihre Realisierung	187
5.	Hinweis auf Fortsetzungsmöglichkeiten	188
a)	Herleitung des Pythagorassatzes aus dem Kathetensatz	188
b)	Der Höhensatz als Folgerung	190
c)	Anwendung des Kathetensatzes zur "Quadratur von Rechtecken"	191
d)	Aktivitäten an einem Parkett	191
C.	Möglichkeiten des Einstiegs über den Höhensatz	197
1.	Die Flächenverwandlung Quadrat \rightarrow Rechteck als Ausgangsproblem	197
a)	Die Verwandlung des Höhenquadrats in das Rechteck mit dem Hypotenusenabschnitt p als Seite	197

VI

b)	Die Lösung des Verwandlungsproblems "Quadrat \rightarrow Rechteck" durch Anwendung des Satzes von den "Ergänzungsparallelogrammen"	199
2.	Ein "Höhensatz-Parkett" als Zugang zum Höhensatz	202
3.	Experimente mit dem Ziel, den Höhensatz zu entdecken	203
a)	Ein Puzzle als Zugang zum Höhensatz	203
b)	Auffinden des Höhensatzes aufgrund von Beobach- tungen an einem umfangreichen Beispielvorrat	206
4.	Hinweis auf einige Möglichkeiten, den Höhen- satz als "Abfallprodukt" vorher behandelter mathematischer Sachverhalte zu gewinnen	209
5.	Hinweis auf Fortsetzungsmöglichkeiten	210
a)	Herleitung des Pythagorassatzes aus dem Höhensatz	210
b)	Herleitung des Kathetensatzes	210
c)	Anwendung des Höhensatzes zur "Quadratur von Rechtecken"	210
d)	Lösung einer Konstruktionsaufgabe mit Hilfe des Höhensatzes	212
e)	Konstruktion von arithmetischem, geometrischem und harmonischem Mittel sowie ihr Größenvergleich	213
f)	Lösung einer Beweisaufgabe mit Hilfe des Höhensatzes	215
D.	Möglichkeiten des Einstiegs über den Pythagorassatz	217
1.	Vorbemerkung zum Aufbau dieses Kapitels	217
a)	Hinweis auf einen Aufsatz von G. HOLLAND	217
b)	Kriterien für die unterrichtliche Behandlung geometrischer Sätze	217
c)	Vorüberlegungen zur unterrichtlichen Behandlung geometrischer Sätze	218
d)	Die vier Unterrichtsstrategien zum Gewinnen und Be- weisen geometrischer Sätze nach G. HOLLAND	219
2.	Möglichkeiten zur induktiven Gewinnung des Pythagorassatzes	219
a)	Hinweis auf notwendige Vorüberlegungen	219
b)	Ein experimentelles Vorgehen in Anlehnung an M. WAGENSCHNIG	222

VII

c)	Hinweis auf eine zweite Möglichkeit, auf experimentell-induktivem Wege zum Pythagorassatz zu kommen	230
d)	Einige grundsätzliche Bemerkungen zur Strategie der induktiven Satzfindung	233
3.	Satz- und Beweisfindung durch Lösung einer Konstruktionsaufgabe: Die Quadratur der "Zwei-Quadrat-Figur"	235
a)	Beschreibung dieser Strategie und Hinweis auf ihre Anwendung in den Kapiteln II. B und II. C	235
b)	Formulierung der zu (P) führenden Konstruktionsaufgabe	235
c)	Zum Unterrichtsverlauf	236
4.	Satz- und Beweisfindung durch Analyse einer geometrischen Konfiguration	246
a)	Beschreibung dieser Strategie und Hinweis auf ihre Anwendung in Kap. II. B und II. C	246
b)	Hinweis auf Puzzles zum Pythagorassatz	247
c)	Hinweis auf "Filme" zum Pythagorassatz	250
d)	Hinweis auf "Pythagoras-Parkette"	254
5.	Satz- und Beweisfindung durch Lösen einer Berechnungsaufgabe	256
a)	Beschreibung dieser Strategie	256
b)	Gewinnung von (P) durch Lösen einer Berechnungsaufgabe	257
c)	Hinweis auf ein dynamisches Modell zum Variieren der Pythagorasfigur	265
6.	Hinweis auf einige Möglichkeiten, den Pythagorassatz als "Abfallprodukt" vorher behandelter mathematischer Sachverhalte zu gewinnen	267
7.	Hinweis auf Fortsetzungsmöglichkeiten	268
a)	Folgerung von (K) und (H) aus (P)	268
b)	Die Umkehrung von (P)	268
c)	Hinweis auf die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten von (P) auf Konstruktions-, Beweis- und Berechnungsaufgaben	269
d)	Spezialisierungen, Verallgemeinerungen und Analogien von (P) im Mathematikunterricht	270

VIII

8.	Ein Exkurs zum Thema "Lernziele"	271
a)	Anmerkungen zum Problemkreis "Allgemeine Lernziele"	271
b)	Zur Formulierung von Lernzeilen für den Unterricht	272
c)	Skizzierung der "BLOOMschen Taxonomie" von kognitiven Lernzielen	272
d)	Beispiele für Aktivitäten im Zusammenhang mit dem Pythagorassatz und ihre Einordnung in die BLOOMsche Taxonomie	274
e)	Beispiele für Prüfungsaufgaben zur Satzgruppe des Pythagoras	279

III. Anwendungen

A.	Aufgaben zum rechtwinkligen Dreieck	290
1.	Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck	290
a)	Zusammenstellung der wichtigsten Formeln für das rechtwinklige Dreieck	290
b)	Einfachste Berechnungen der "üblichen" Art	292
c)	Berechnung der "klassischen Strecken" im rechtwinkligen Dreieck	294
d)	Umkreisradius, Inkreisradius und Ankreisradien beim rechtwinkligen Dreieck	296
2.	Beweisaufgaben	302
a)	Hinweis auf Kap. I	302
b)	Besonderheiten des rechtwinkligen Dreiecks	303
c)	Hinweis auf charakteristische Eigenschaften	308
d)	Beispiele für "algebraische Beweise"	310
3.	Konstruktionsaufgaben	317
a)	Übersicht über die möglichen Fälle	317
b)	Beispiele für anspruchsvolle Konstruktionsaufgaben	319
B.	Weitere Anwendungen in der Planimetrie	323
1.	Berechnungen	323
a)	Zur Herleitung wichtiger Formeln	323
b)	Berechnungen an vorgegebenen Figuren	326
2.	Beispiele für Beweisaufgaben	339
a)	Hinweis auf Kap. I und Kap. II	339

IX

b)	Beispiele für weitere Beweisaufgaben	339
c)	Beispiele für die Analyse vorgegebener Figuren	343
3.	Konstruktionsaufgaben	357
a)	Quadraturprobleme	357
b)	Arithmetik mit Zirkel und Lineal	359
c)	Beispiele für weitere Konstruktionsaufgaben	362
C.	Anwendungen in der Stereometrie	365
1.	Berechnungen und Beweise an geometrischen Körpern	365
a)	Herleitung von Formeln	365
b)	Beispiele für Beweise	369
c)	Ein Beispiel für eine Berechnungsaufgabe	370
2.	Anwendungen auf Situationen aus Alltag und Umwelt	374
a)	Beispiele für "pseudo-realistische" Situationen	374
b)	Beispiele für wirklichkeitsnahe Situationen	376
3.	Herstellung geometrischer Kuriositäten	390
a)	Der sechseckige rotierende Ring	390
b)	Hinweis auf den quadratischen rotierenden Ring	393
c)	Der umstülpbare Würfel	395
	Literatur	398
(I)	Literatur, welche bei der Erstellung des LEU - Heftes "Die Satzgruppe des Pythagoras" (vgl. [58]) verwendet wurde	398
(II)	Weitere Literatur, die bei der Erstellung dieses Buches, also der Neubearbeitung des LEU - Heftes (vgl. [58]) noch mit eingearbeitet wurde	400