

# Inhalt

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Vorwort</b>  | <b>1</b>  |
| <b>I. Sachinformationen zur Satzgruppe des Pythagoras</b>   |           |
| <b>A. Die Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck, ihre Umkehrung und ihre logische Abhängigkeit voneinander</b> | <b>8</b>  |
| 1. Formulierung der Sätze   | 8         |
| a) Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck  | 8         |
| b) Die zur "Satzgruppe des Pythagoras" gehörenden Sätze   | 9         |
| 2. Die Kehrsätze zu (P), (K) und (H)  | 11        |
| a) Eine Vorbemerkung  | 11        |
| b) Der Kehrsatz zu (P)  | 12        |
| c) Der Kehrsatz zu (K)  | 12        |
| d) Der Kehrsatz zu (H)  | 13        |
| 3. Zur gegenseitigen logischen Abhängigkeit der Sätze (P), (K) und (H)  | 14        |
| a) Die logische Gleichwertigkeit von (P) und (K)  | 14        |
| b) Die logische Beziehung zwischen (P) und (H)  | 25        |
| c) Die logische Beziehung zwischen (K) und (H)  | 16        |
| <b>B. Beweise für die Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck</b>  | <b>19</b> |
| 1. Euklidische Methode  | 20        |
| 2. Abbildungsgeometrische Methode   | 22        |
| a) Beweis des Kathetensatzens mit Schrägspiegelung und Scherung   | 22        |
| b) Beweis des Höhensatzes mit Hilfe von drei Scherungen   | 23        |
| 3. Zerlegungsbeweise  | 24        |
| a) Das Prinzip der Zerlegungsgleichheit   | 24        |
| b) Einige Zerlegungsbeweise für den Pythagorassatz  | 25        |
| c) Ein Zerlegungsbeweis für den Kathetensatz  | 28        |
| d) Hinweis auf Spezialfälle, in welchen geeignete Zerlegungen des Höhenquadrats zum Höhensatz führen            | 29        |
| e) Zwei vollständige Zerlegungsbeweise für (P)  | 31        |

## II

|    |   |    |
|----|---|----|
| 4. | <b>Ergänzungsbeweise</b>  | 37 |
| a) | Das Prinzip der Ergänzungsgleichheit  | 37 |
| b) | Ein Ergänzungsbeweis für (H)  | 37 |
| c) | Ein Ergänzungsbeweis für (K)  | 38 |
| d) | Einige Ergänzungsbeweise für (P)  | 39 |
| 5. | <b>Hinweis auf Parkettierungen als Beweisfiguren</b>  | 42 |
| 6. | <b>Arithmetische Beweise</b>  | 43 |
| a) | Einige arithmetische Beweise für (P)  | 43 |
| b) | Ein arithmetischer Beweis für (H)   | 47 |
| c) | Hinweis auf einen arithmetischen Beweis für (K)   | 48 |
| 7. | <b>Beweise mit Hilfe der Ähnlichkeitsbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck</b>  | 49 |
| a) | Ähnlichkeitsbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck   | 49 |
| b) | (H) und (K) als Folgerung aus den Ähnlichkeitsbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck   | 50 |
| c) | (P) als Folgerung aus den Ähnlichkeitsbeziehungen am rechtwinkligen Dreieck   | 51 |
| d) | Ein weiterer Ähnlichkeitsbeweis für (P)   | 52 |
| 8. | <b>Vektorielle Beweise zu den Sätzen am rechtwinkligen Dreieck</b>  | 53 |
| a) | Das Skalarprodukt für Vektoren des $\mathbb{R}^2$ und seine Eigenschaften   | 53 |
| b) | Zwei vektorielle Beweise für (K)  | 54 |
| c) | Ein vektorieller Beweis für (H)   | 55 |
| d) | Ein vektorieller Beweis für (P)   | 55 |
| 9. | <b>Hinweis auf weitere Möglichkeiten zur Gewinnung der Sätze am rechtwinkligen Dreieck im Zusammenhang mit anderen mathematischen Sachverhalten</b> | 56 |
| a) | Gewinnung der Sätze am rechtwinkligen Dreieck aus einem allgemeinen Projektionssatz   | 56 |
| b) | (H), (K) und (P) als Folgerungen aus den Ähnlichkeitsbeziehungen am Kreis   | 59 |
| c) | (P) als Folgerung aus dem Satz des PTOLEMÄUS  | 63 |
| d) | Herleitung von (H) im Zusammenhang mit der Behandlung von Steigungsdreiecken bei Geraden  | 64 |
| e) | Gewinnung der Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck im Zusammenhang mit Flächenverwandlungen   | 67 |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>C. Spezialisierungen, Verallgemeinerungen und Analogien zu den Flächensätzen am rechtwinkligen Dreieck</b> | <b>68</b> |
| 1. Spezialisierungen  | 69        |
| a) Rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenmaßzahlen  | 69        |
| b) Gleichschenklige - rechtwinklige Dreiecke  | 78        |
| c) Hinweis auf interessante Spezialfälle von "fast-pythagoreischen Dreiecken"                                 | 79        |
| d) Rechtwinklige Dreiecke mit 1 als Maßzahl der Hypotenuse  | 83        |
| 2. Verallgemeinerungen  | 84        |
| a) Der Projektionssatz für Dreiecke als Verallgemeinerung von (K)   | 84        |
| b) Eine Verallgemeinerung von (H)   | 85        |
| c) Der Kosinussatz als Verallgemeinerung von (P)  | 86        |
| d) Ein Quadratsummensatz als Verallgemeinerung  | 87        |
| e) Der Satz des PAPPOS als Verallgemeinerung von (K) bzw. von (P)   | 88        |
| f) Eine Verallgemeinerung von (P) auf ähnliche Figuren über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks          | 90        |
| g) Ein Satz über die Diagonalen im Parallelogramm als Verallgemeinerung von (P)                               | 92        |
| h) Hinweis auf Möglichkeiten für Verallgemeinerungen zu den pythagoreischen Zahlentripeln                     | 93        |
| 3. Analogien  | 108       |
| a) Zum Begriff "Analogie"   | 108       |
| b) Quader als räumliches Analogon zum Rechteck  | 109       |
| c) Analogiebildungen zu den durch die Flächensätze gegebenen Möglichkeiten der Flächenverwandlung             | 110       |
| d) Rechtwinkliges Tetraeder als räumliches Analogon zum rechtwinkligen Dreieck                                | 112       |
| e) Untersuchungen am vierdimensionalen rechtwinkligen "Tetraeder"   | 118       |
| f) Versuch einer Verallgemeinerung auf das n-dimensionale rechtwinklige "Tetraeder"                           | 123       |
| g) Hinweis auf ein weiteres dreidimensionales Analogon zum rechtwinkligen Dreieck                             | 124       |

## IV

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| h)        | Hinweis auf Analogisierungen im Zusammenhang mit den pythagoreischen Zahlentripeln           | 125        |
| <b>D.</b> | <b>Geschichtliche Informationen zu den Flächensätzen am rechtwinkligen Dreieck</b>           | <b>128</b> |
| 1.        | Hinweis auf vielfältige Belege für die frühe Kenntnis pythagoreischer Zahlentripel           | 128        |
| a)        | Pythagoreische Dreiecke in der megalithischen Architektur Westeuropas und Ägyptens           | 128        |
| b)        | Beispiele für früheste Verfahren zur Konstruktion pythagoreischer Zahlentripel               | 130        |
| c)        | Hinweis auf Aufgaben, die auf dem Hintergrund pythagoreischer Zahlentripel konzipiert wurden | 134        |
| 2.        | Beispiele für Aufgaben aus alter Zeit, zu deren Lösung der Pythagorassatz herangezogen wurde | 135        |
| a)        | Berechnungen am Rechteck   | 135        |
| b)        | Berechnungen mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke   | 136        |
| d)        | Hinweis auf Anwendung des Pythagorassatzes in der Astronomie                                 | 141        |
| 3.        | Hinweise auf früheste Formulierungen des Pythagorassatzes und Begründungen                   | 142        |
| a)        | Hinweis auf unterschiedliche Methoden  | 142        |
| b)        | Ein altindischer Beweis des Pythagorassatzes   | 143        |
| c)        | Der Sonderfall der Verdopplung bzw. Halbierung eines Quadrats                                | 143        |
| d)        | Der Pythagorassatz im altchinesischen Kalenderwerk "Chou Pei Suan Ching"                     | 144        |
| e)        | Der Beweis des Pythagorassatzes bei den Griechen   | 145        |
| 4.        | Die Hypothese von B. L. van der WAERDEN  | 146        |
| 5.        | Der Pythagorassatz in Mittelalter und Neuzeit  | 146        |
| a)        | Hinweis auf die geschichtliche Entwicklung   | 146        |
| b)        | Der Pythagorassatz im Mittelalter  | 147        |
| c)        | Hinweis auf die große Anzahl heute bekannter Beweise für den Pythagorassatz                  | 148        |
| d)        | Zur Verwendung der Pythagorasfigur in unserer Zeit   | 148        |
| e)        | Pythagoras und "Science fiction"   | 148        |

|            |  |             |
|------------|--|-------------|
| <b>II.</b> | <b>Bemerkungen zum unterrichtlichen Vorgehen:<br/>Der Einstieg</b>   |             |
| <b>A.</b>  | <b>Eine Vorbemerkung zum Einstieg in den Themenkreis<br/>"Satzgruppe des Pythagoras"</b>   | <b>150/</b> |
| <b>B.</b>  | <b>Möglichkeiten des Einstiegs über den Kathetensatz</b>   | <b>152</b>  |
| 1.         | Vorüberlegungen  | 152         |
| 2.         | Die "Quadratur des Rechtecks"<br>als Ausgangsproblem   | 153         |
| a)         | Ein Probiervverfahren mit Hilfe von Scherungen   | 153         |
| b)         | Ein weiterer konstruktiver Zugang zum Kathetensatz   | 171         |
| c)         | Ein Weg zur Rechteckquadratur (und damit<br>wieder zum Kathetensatz) mit Hilfe der<br>Lösung der Umkehraufgabe                           | 172         |
| 3.         | Experimente mit dem Ziel, den Kathetensatz<br>zu entdecken   | 176         |
| a)         | Ein Puzzle als Zugang zum Kathetensatz   | 176         |
| b)         | Ein "Kathetensatz-Parkett"   | 178         |
| c)         | Auffinden des Kathetensatzes aufgrund von Beob-<br>achtungen an einem umfangreichen Beispielvorrat                                       | 182         |
| 4.         | Hinweis auf einige Möglichkeiten, den Kathe-<br>tensatz als "Abfallprodukt" vorher behandelte<br>mathematischer Sachverhalte zu gewinnen | 186         |
| a)         | Erinnerung an derartige Möglichkeiten  | 186         |
| b)         | Einige kritische Bemerkungen   | 186         |
| c)         | Einige fachdidaktische Prinzipien und ihre Realisierung  | 187         |
| 5.         | Hinweis auf Fortsetzungsmöglichkeiten  | 188         |
| a)         | Herleitung des Pythagorassatzes aus dem Kathetensatz   | 188         |
| b)         | Der Höhensatz als Folgerung  | 190         |
| c)         | Anwendung des Kathetensatzes zur<br>"Quadratur von Rechtecken"   | 191         |
| d)         | Aktivitäten an einem Parkett   | 191         |
| <b>C.</b>  | <b>Möglichkeiten des Einstiegs über den Höhensatz</b>  | <b>197</b>  |
| 1.         | Die Flächenverwandlung Quadrat $\rightarrow$ Rechteck<br>als Ausgangsproblem   | 197         |
| a)         | Die Verwandlung des Höhenquadrats in das Rechteck<br>mit dem Hypotenusenabschnitt $p$ als Seite  | 197         |

## VI

|    |  |            |
|----|--|------------|
| b) | Die Lösung des Verwandlungsproblems<br>"Quadrat $\rightarrow$ Rechteck" durch Anwendung des<br>Satzes von den "Ergänzungsparallelogrammen" | 199        |
| 2. | Ein "Höhensatz-Parkett" als Zugang<br>zum Höhensatz  | 202        |
| 3. | Experimente mit dem Ziel, den<br>Höhensatz zu entdecken  | 203        |
| a) | Ein Puzzle als Zugang zum Höhensatz  | 203        |
| b) | Auffinden des Höhensatzes aufgrund von Beobach-<br>tungen an einem umfangreichen Beispielvorrat  | 206        |
| 4. | Hinweis auf einige Möglichkeiten, den Höhen-<br>satz als "Abfallprodukt" vorher behandelte<br>mathematischer Sachverhalte zu gewinnen      | 209        |
| 5. | Hinweis auf Fortsetzungsmöglichkeiten  | 210        |
| a) | Herleitung des Pythagorassatzes aus dem Höhensatz  | 210        |
| b) | Herleitung des Kathetensatzes  | 210        |
| c) | Anwendung des Höhensatzes zur<br>"Quadratur von Rechtecken"  | 210        |
| d) | Lösung einer Konstruktionsaufgabe<br>mit Hilfe des Höhensatzes   | 212        |
| e) | Konstruktion von arithmetischem, geometrischem und<br>harmonischem Mittel sowie ihr Größenvergleich  | 213        |
| f) | Lösung einer Beweisaufgabe mit Hilfe des Höhensatzes   | 215        |
| D. | <b>Möglichkeiten des Einstiegs über den Pythagorassatz</b>   | <b>217</b> |
| 1. | Vorbemerkung zum Aufbau dieses Kapitels  | 217        |
| a) | Hinweis auf einen Aufsatz von G. HOLLAND   | 217        |
| b) | Kriterien für die unterrichtliche Behandlung<br>geometrischer Sätze  | 217        |
| c) | Vorüberlegungen zur unterrichtlichen Behandlung<br>geometrischer Sätze   | 218        |
| d) | Die vier Unterrichtsstrategien zum Gewinnen und Be-<br>weisen geometrischer Sätze nach G. HOLLAND  | 219        |
| 2. | Möglichkeiten zur induktiven Gewinnung des<br>Pythagorassatzes   | 219        |
| a) | Hinweis auf notwendige Vorüberlegungen   | 219        |
| b) | Ein experimentelles Vorgehen in Anlehnung<br>an M. WAGENSCHNIG   | 222        |

## VII

|    |  |            |
|----|--|------------|
| c) | Hinweis auf eine zweite Möglichkeit, auf experimentell-induktivem Wege zum Pythagorassatz zu kommen  | 230        |
| d) | Einige grundsätzliche Bemerkungen zur Strategie der induktiven Satzfindung   | 233        |
| 3. | <b>Satz- und Beweisfindung durch Lösung einer Konstruktionsaufgabe: Die Quadratur der "Zwei-Quadrat-Figur"</b>                             | <b>235</b> |
| a) | Beschreibung dieser Strategie und Hinweis auf ihre Anwendung in den Kapiteln II. B und II. C   | 235        |
| b) | Formulierung der zu (P) führenden Konstruktionsaufgabe   | 235        |
| c) | Zum Unterrichtsverlauf   | 236        |
| 4. | <b>Satz- und Beweisfindung durch Analyse einer geometrischen Konfiguration</b>   | <b>246</b> |
| a) | Beschreibung dieser Strategie und Hinweis auf ihre Anwendung in Kap. II. B und II. C   | 246        |
| b) | Hinweis auf Puzzles zum Pythagorassatz   | 247        |
| c) | Hinweis auf "Filme" zum Pythagorassatz   | 250        |
| d) | Hinweis auf "Pythagoras-Parkette"  | 254        |
| 5. | <b>Satz- und Beweisfindung durch Lösen einer Berechnungsaufgabe</b>  | <b>256</b> |
| a) | Beschreibung dieser Strategie  | 256        |
| b) | Gewinnung von (P) durch Lösen einer Berechnungsaufgabe   | 257        |
| c) | Hinweis auf ein dynamisches Modell zum Variieren der Pythagorasfigur   | 265        |
| 6. | <b>Hinweis auf einige Möglichkeiten, den Pythagorassatz als "Abfallprodukt" vorher behandelter mathematischer Sachverhalte zu gewinnen</b> | <b>267</b> |
| 7. | <b>Hinweis auf Fortsetzungsmöglichkeiten</b>   | <b>268</b> |
| a) | Folgerung von (K) und (H) aus (P)  | 268        |
| b) | Die Umkehrung von (P)  | 268        |
| c) | Hinweis auf die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten von (P) auf Konstruktions-, Beweis- und Berechnungsaufgaben                           | 269        |
| d) | Spezialisierungen, Verallgemeinerungen und Analogien von (P) im Mathematikunterricht   | 270        |

## VIII

|    |   |     |
|----|---|-----|
| 8. | Ein Exkurs zum Thema "Lernziele"  | 271 |
| a) | Anmerkungen zum Problemkreis "Allgemeine Lernziele"   | 271 |
| b) | Zur Formulierung von Lernzeilen für den Unterricht  | 272 |
| c) | Skizzierung der "BLOOMschen Taxonomie" von kognitiven Lernzielen  | 272 |
| d) | Beispiele für Aktivitäten im Zusammenhang mit dem Pythagorassatz und ihre Einordnung in die BLOOMsche Taxonomie | 274 |
| e) | Beispiele für Prüfungsaufgaben zur Satzgruppe des Pythagoras  | 279 |

## III. Anwendungen

|    |  |     |
|----|--|-----|
| A. | Aufgaben zum rechtwinkligen Dreieck  | 290 |
| 1. | Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck                                     | 290 |
| a) | Zusammenstellung der wichtigsten Formeln für das rechtwinklige Dreieck     | 290 |
| b) | Einfachste Berechnungen der "üblichen" Art                                 | 292 |
| c) | Berechnung der "klassischen Strecken" im rechtwinkligen Dreieck            | 294 |
| d) | Umkreisradius, Inkreisradius und Ankreisradien beim rechtwinkligen Dreieck | 296 |
| 2. | Beweisaufgaben   | 302 |
| a) | Hinweis auf Kap. I   | 302 |
| b) | Besonderheiten des rechtwinkligen Dreiecks                                 | 303 |
| c) | Hinweis auf charakteristische Eigenschaften                                | 308 |
| d) | Beispiele für "algebraische Beweise"                                       | 310 |
| 3. | Konstruktionsaufgaben  | 317 |
| a) | Übersicht über die möglichen Fälle   | 317 |
| b) | Beispiele für anspruchsvolle Konstruktionsaufgaben                         | 319 |
| B. | Weitere Anwendungen in der Planimetrie                                     | 323 |
| 1. | Berechnungen   | 323 |
| a) | Zur Herleitung wichtiger Formeln   | 323 |
| b) | Berechnungen an vorgegebenen Figuren                                       | 326 |
| 2. | Beispiele für Beweisaufgaben   | 339 |
| a) | Hinweis auf Kap. I und Kap. II   | 339 |

## IX

|                  |  |            |
|------------------|--|------------|
| b)               | Beispiele für weitere Beweisaufgaben   | 339        |
| c)               | Beispiele für die Analyse vorgegebener Figuren   | 343        |
| 3.               | <b>Konstruktionsaufgaben</b>   | <b>357</b> |
| a)               | Quadraturprobleme  | 357        |
| b)               | Arithmetik mit Zirkel und Lineal   | 359        |
| c)               | Beispiele für weitere Konstruktionsaufgaben  | 362        |
| <b>C.</b>        | <b>Anwendungen in der Stereometrie</b>   | <b>365</b> |
| 1.               | <b>Berechnungen und Beweise an geometrischen Körpern</b>   | <b>365</b> |
| a)               | Herleitung von Formeln   | 365        |
| b)               | Beispiele für Beweise  | 369        |
| c)               | Ein Beispiel für eine Berechnungsaufgabe   | 370        |
| 2.               | <b>Anwendungen auf Situationen aus Alltag und Umwelt</b>   | <b>374</b> |
| a)               | Beispiele für "pseudo-realistische" Situationen  | 374        |
| b)               | Beispiele für wirklichkeitsnahe Situationen  | 376        |
| 3.               | <b>Herstellung geometrischer Kuriositäten</b>  | <b>390</b> |
| a)               | Der sechseckige rotierende Ring  | 390        |
| b)               | Hinweis auf den quadratischen rotierenden Ring   | 393        |
| c)               | Der umstülpbare Würfel   | 395        |
| <b>Literatur</b> |  | <b>398</b> |
| (I)              | Literatur, welche bei der Erstellung des LEU - Heftes "Die Satzgruppe des Pythagoras" (vgl. [58]) verwendet wurde                          | 398        |
| (II)             | Weitere Literatur, die bei der Erstellung dieses Buches, also der Neubearbeitung des LEU - Heftes (vgl. [58]) noch mit eingearbeitet wurde | 400        |