

# Inhalt.

## Erster Abschnitt.

### Parallelprojektion und Zentralprojektion ebener Figuren.

	Seite
1—6. Die Affinität. Definition und Eigenschaften . . . . .	1
7. Die Ellipse als affines Bild (Parallelprojektion) des Kreises . . . . .	5
8. 9. Die Perspektivität. Definition und Eigenschaften . . . . .	5
10. Unendlich ferne Punkte und Geraden . . . . .	7
11—13. Eigenschaften perspektiver ebener Figuren . . . . .	8
14. Bestimmungsstücke der Perspektive . . . . .	9
15. Rechteck, Rhombus und Quadrat als perspektive Bilder (Zentralprojektionen) des Vierecks . . . . .	9
16. Perspektivische Lage zweier Dreiecke (Desarguesscher Satz) . . . . .	10
17—22. Das vollständige Viereck und Vierseit. Involutorische Punkte- und Strahlenpaare. Harmonische Punktepaare . . . . .	11
23. Wechselbeziehung und Streckenverhältnis zwischen harmonischen Punktepaaren . . . . .	15
24. Das vollständige Viereck und harmonische Strahlenpaare . . . . .	16
25. 26. Wechselbeziehung und Abstandsverhältnis zwischen harmonischen Strahlenpaaren. Vier harmonische Punkte als Schnitt von vier harmonischen Strahlen . . . . .	17
27. Das Gesetz der Dualität in der Ebene und im Raum . . . . .	19
28. Vom Viereck und Vierseit zum Vierkant und Vierfläch. Involutorische Ebenenpaare . . . . .	20
29. 30. Besondere harmonische und involutorische Lagen. Folgerungen für das Vierseit . . . . .	20
31. 32. Punktreihe, Strahl- und Ebenenbüschel in perspektiver Lage . . . . .	22
33. 34. Abstandsverhältnis und Doppelverhältnis . . . . .	22
35. Perspektivische Grundgebilde . . . . .	23
36. Projektive Grundgebilde . . . . .	24
37—39. Die Lage als Beziehung zwischen perspektiven und projektiven Grundgebilden . . . . .	24
40. Die Transitivität der projektiven Beziehung . . . . .	25
41. Invarianz des Doppelverhältnisses von vier Elementen bei gleichzeitiger Vertauschung der Elemente in den Elementenpaaren . . . . .	26
42. 48. Projektive Beziehungen beim Dreieck und Tetraeder . . . . .	26

	Seite
44. Konstruktion entsprechender Elemente in projektiven Gebilden	27
45—48. Ausgezeichnete Elemente in projektiven Gebilden: Gegenpunkte und Doppelpunkte, Rechtwinkelstrahlen und Doppelstrahlen	28
49—51. Involutorische Grundgebilde. Definition und Eigenschaften	30
52. 53. Doppelpunkte und Doppelstrahlen bei involutorischen Gebilden	31
54. 55. Strahleninvolution und Schnittkreis. Pol und Polare	32
56. 57. Konstruktion ausgezeichneter Elemente in involutorischen Gebilden	33
58. Projektive Punktreihen auf windschiefen Geraden und das Hyperboloid	34
59. Ähnliche Punktreihen auf windschiefen Geraden und das Paraboloid	35
60. Zusammenfassung	36

### Aufgaben:

61. Zwei Vierecke in perspektive Lage zu bringen	36
62. Zwei projektive Strahlbüschel in zwei Büschel mit rechtwinkligen entsprechenden Strahlen zu verwandeln	38
63. Vier feste Ebenen durch Gerade in ähnlichen Punktquadrupeln zu schneiden	39
64. 65. Vier bzw. fünf feste Ebenen durch Gerade in kongruenten Punktquadrupeln bzw. Punktquintupeln zu schneiden	42
66. 67. Affine räumliche Gebilde in affiner und in allgemeiner Lage	44
68—71. Räumliche Gebilde in perspektiver Lage	45
72—75. Tetraeder in desmischer Lage. Beziehungen im desmischen System	46

### Zweiter Abschnitt.

#### Kugel, Zylinder und Kegel.

76—78. Kugel, Drehzylinder und Drehkegel. Definitionen	50
79. Die allgemeine Zylinder- und Kegelfläche	51
80. 81. Der schiefe Kreiszyylinder und der schiefe Kreiskegel. Symmetrieverhältnisse. Wechselschnitte	52
82. Die Kegel durch zwei Kugelkreise	54
83. Der Tangentialkegel der Kugel. Pol und Polarebene	54
84. 85. Schnitt zweier Kugeln. Schnittwinkel. Orthogonalkugel	55
86. 87. Potenz eines Punktes bezüglich einer Kugel. Potenzebene, Potenzlinie bzw. Potenzpunkt für zwei, drei bzw. vier Kugeln	56
88—92. Die Ähnlichkeitspunkte für zwei, drei und vier Kugeln, ihre Gruppierung, Eigenschaften und Bedeutung für den Schnitt von Kugeln	57

93. 94.	Kugelbüschel, Kugelbündel und Kugelsystem aus der Potenz-eigenschaft. Beziehung zwischen Büschel und Bündel . . .	60
95—98.	Kugelsystem, Kugelbündel und Kugelbüschel aus der Schnitt-eigenschaft. Steinersche Potenzkugeln . . . . .	61
99.	Punkt und Ebene als Grenzfälle der Kugel . . . . .	62
100—105.	Orthogonale Kreise und Kreisbüschel auf der Kugel. Konjugierte Punkte und Geraden. Polartetraeder der Kugel	63
106.	Die Berührungspunkte der Kugeln, die drei Kugeln gleichartig berühren . . . . .	65

### Aufgaben:

107.	Zwei Kreise auf eine Ebene wiederum als Kreise zu projizieren	66
108.	Die gemeinsamen Mantellinien zweier Drehkegel mit gemeinsamem Scheitel zu bestimmen . . . . .	67
109.	Die gemeinsame Potenzebene zweier sich nicht schneidender Kugeln zu bestimmen . . . . .	68
110.	Die Kugeln durch einen Kreis zu legen, die einen Kreis berühren. Einander berührende und einander orthogonal schneidende Kreise im Raum . . . . .	68
111.	Der Orthogonalkreis dreier Kugeln . . . . .	68
112.	Drei orthogonale Kugelkreise durch drei Punktepaare einer Kugel zu legen . . . . .	69
113.	Durch einen gegebenen Kreis die Orthogonalkugel zu einer Kugel zu legen . . . . .	69
114.	Beziehung zwischen zwei orthogonalen Kugeln, die durch je einen gegebenen Kreis gehen . . . . .	69
115.	Drei einander berührende Kugeln durch drei sich gegenseitig ausschließende Kreise einer Ebene zu legen . . . . .	70
116.	Die Kreise zu bestimmen, die drei Kreise einer Kugel gleichzeitig berühren . . . . .	71
117.	Orthogonale Kugelkreise durch drei Punktepaare eines größten Kugelkreises bzw. durch drei beliebige Punktepaare der Kugel zu legen . . . . .	71
118.	Paarweise orthogonale Kugeln durch drei Kreise einer Ebene bzw. durch drei Kreise im Raum zu legen . . . . .	73
119.	Den Kreis zu bestimmen, der drei Kreise im Raum je zweimal schneidet . . . . .	74
120.	Die geschlossene orthogonale Kette von vier Kugeln. Gegenseitige Lage der Schnittkreise. Rechtwinkelkreisvierecke auf der Kugel. Polygon der Kugelmittelpunkte einer geschlossenen orthogonalen Kette mit gerader und ungerader Gliederzahl. Konstruktion dreier orthogonaler Kugeln bei gegebenen Mittelpunkten . . . . .	75

121. Drei zueinander orthogonale Kugeln zu bestimmen, deren Mittelpunkte auf drei einseitigen Mittelpunktsstrahlen einer Kugel liegen, zu der sie ebenfalls orthogonal sind . . . 77
122. Eine geschlossene orthogonale Kette von vier Kreisen zu bestimmen, die zu je zwei durch zwei vorgegebene Punktepaare einer Kugel gehen . . . 78
123. Die Kreise zu bestimmen, die zwei beliebige Kreise im Raum je zweimal orthogonal schneiden . . . 78
124. Die Kugel zu bestimmen, die vier Kugeln in größten Kreisen, bzw. vier Kreise im Raum in den Endpunkten von vier Durchmessern schneidet . . . 80
125. Die Kugeln zu bestimmen, die vier Kugeln in Kreisen von gleichem Radius schneiden . . . 81
126. Die Kugeln zu bestimmen, die vier Kugeln, zwei Ebenen und zwei Kugeln, drei Ebenen und eine Kugel berühren . . . 81
127. Die Kugeln zu bestimmen, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen und die zwei Kugeln berühren . . . 83
128. Die Kreise durch zwei Punkte zu bestimmen, die zwei Kugeln berühren . . . 84
129. Die Kugeln zu bestimmen, deren Mittelpunkte in einer Ebene liegen und die drei Kugeln berühren . . . 85
130. Die Kugeln zu bestimmen, die drei Ebenen und eine Gerade berühren . . . 85
131. Die Kugeln zu bestimmen, die die Seiten eines windschiefen Vierseits berühren . . . 86

### Dritter Abschnitt.

#### Die Transformation nach reziproken Radien.

- 132—136. Die Transformation nach reziproken Radien. Definition. Beziehung zwischen Original und Bild. Eigenschaften des Zentrums und der Bezugskugel . . . 88
137. In zwei entsprechenden Punkten zweier entsprechender Kugeln gibt es eine Berührungskugel, die zur Bezugskugel orthogonal ist . . . 90
138. Zwei Kugeln bzw. zwei Kreise schneiden sich unter den gleichen Winkeln wie die ihnen entsprechenden Kugeln bzw. Kreise. Definition des Schnittwinkels . . . 90
139. Einem Kugelbüschel und einem Kugelkreisbüschel entspricht wieder je ein solcher . . . 91
140. Die Strahlen vom Transformationszentrum nach den Ähnlichkeitspunkten eines Kugel paares bzw. den Scheiteln der Kegel durch ein Kugelkreispaar gehen durch die entsprechenden der Bilder . . . 92

141.	Konformität — jedoch nicht Gleichsinnigkeit — der Transformation nach reziproken Radien . . . . .	92
------	---	----

Anwendungen und Aufgaben:

142.	Alle Kugeln, die zwei Büschelkugeln unter vorgegebenen Winkeln schneiden, schneiden jede Büschelkugel unter bestimmtem Winkel . . . . .	93
143.	Die Kugeln durch einen Punkt zu legen, die drei Kugeln unter vorgegebenen Winkeln schneiden . . . . .	94
144.	Eine Kugel zu bestimmen, die zwei Ebenen bzw. vier Ebenen eines Vierflachs unter vorgegebenen Winkeln schneidet . . . . .	95
145. 146.	Eine Kugel durch einen Kreis bzw. die Kugel im Büschel zweier Kugeln zu bestimmen, die eine Kugel unter gegebenem Winkel schneidet . . . . .	95
147.	Die Kugeln zu bestimmen, die vier gegebene Kugeln unter gegebenen Winkeln schneiden . . . . .	96
148.	Zwei sich nicht schneidende Kugeln in zwei konzentrische zu transformieren . . . . .	96
149.	Zwei bzw. vier Kugeln in gleich große zu transformieren	97
150.	Zwei beliebig im Raum liegende Kreise in zwei in parallelen Ebenen liegende zu transformieren . . . . .	98
151. 152.	Eine Kugel in sich zu transformieren, daß zwei sich nicht schneidende Kugelkreise in zwei in parallelen Ebenen liegende bzw. parallele gleich große übergehen . . . . .	98
153.	Drei sich paarweise schneidende Kugelkreise in drei größte Kugelkreise zu transformieren . . . . .	99
154.	Den Kreis zu bestimmen, der zwei beliebig im Raum liegende Kreise orthogonal schneidet . . . . .	100
155.	Zwei beliebig im Raum liegende Kreise in Kreise zu transformieren, deren Mittelpunkte auf der Schnittlinie ihrer Ebenen liegen . . . . .	101

Die stereographische Projektion.

156. 157.	Das stereographische Bild der Kugel. Verhältnis zur Transformation nach reziproken Radien, Beziehung zwischen Bild und Original . . . . .	102
158—160.	Die Kugeltangente und ihr Bild. Konformität der stereographischen Projektion . . . . .	103
161. 162.	Der Kugelkreis und sein Bild. Kugelkreise mit konzentrischen Bildern . . . . .	105
163.	Büschel und Bündel von Kugelkreisen und ihre Bilder . . . . .	105
164.	Die Projektionen der Scheitel der Kegel durch zwei Kugelkreise sind die Ähnlichkeitspunkte der Bildkreise . . . . .	106

## Aufgaben:

165. Zwei sich nicht schneidende Kugelkreise als zwei konzentrische abzubilden . . . . . 106
166. Zwei sich nicht schneidende Kreise der Ebene in zwei parallele Kugelkreise zu projizieren . . . . . 106
167. Drei Kugelkreise als gleich große abzubilden . . . . . 107
168. Drei sich paarweise schneidende Kreise der Ebene als größte Kreise auf eine Kugel zu projizieren . . . . . 107
169. Vier Kreise einer Ebene als gleich große auf eine Kugel zu projizieren . . . . . 107
170. Winkelsumme im Kugelkreisdreieck, dessen Kreise durch einen Punkt gehen . . . . . 108
171. Drei Kreise mit gemeinsamem Schnittpunkt in der Ebene und auf der Kugel. Die Kugel und ihr eingeschriebene Vierseite . . . . . 108
172. 173. Kugel und eingeschriebenes Tetraeder. Eingeschriebene Tetraeder in desmischer Lage, die durch ein Polartetraeder zu einem desmischen System ergänzt werden . 110
174. Vier Kugeln, die durch die Ecken eines Tetraeders gehen und sich paarweise auf seinen Kanten schneiden, gehen durch einen Punkt . . . . . 113
175. Fünf beliebige Ebenen bilden zu je vier fünf Tetraeder, deren Umkugeln sich zu je vier in einem Punkt schneiden 113

## Vierter Abschnitt.

## Die ebenen Schnitte des Drehkegels.

176. Ellipse, Hyperbel und Parabel als Kegelschnitte, bestimmt durch die Lage der Schnittebene . . . . . 114

## Die Ellipse.

177. Der Ellipsenschnitt. Symmetrieverhältnisse und Elemente der Schnittkurve. (Satz von Dandelin) . . . . . 115
178. Harmonische Teilung der Achse durch Brennpunkt und Leitlinie 116
179. Hilfssätze über Tangenten und Berührebenen der Kugel . . 116
180. Konstanz der Brennstrahlensumme . . . . . 117
181. Haupt- und Nebenachse, Mittelpunkt und Durchmesser der Ellipse . . . . . 117
182. 183. Ellipsentangente und Brennstrahlen . . . . . 117
184. Konstanz des Verhältnisses der Abstände eines Ellipsenpunktes von Brennpunkt und Leitlinie . . . . . 118

185.	Die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf die Ellipsentangenten gefällten Lote und die Endpunkte der um sich selbst verlängerten Lote liegen auf Kreisen . . . . .	118
186—189.	Die Ellipse und zwei Tangenten . . . . .	118
190.	Das Produkt der Lote aus den Brennpunkten auf eine Ellipsentangente ist gleich dem Quadrat der halben Nebenachse . . . . .	121
191.	Die stereographischen Projektionen der Berührkreise der Dandelinischen Kugeln . . . . .	121
192. 193.	Ellipse und Kegel, dessen Leitlinie sie ist und dessen Scheitel senkrecht über einem ihrer Brennpunkte liegt. Drehkegel und Drehzylinder durch die Ellipse . . . . .	122

### Die Hyperbel.

194.	Der Hyperbelschnitt. Elemente der Schnittkurve. (Dandelin-scher Satz) . . . . .	124
195.	Harmonische Teilung der Achse durch Brennpunkt und Leitlinie . . . . .	125
196.	Konstanz der Brennstrahlendifferenz . . . . .	126
197.	Die Nebenachse der Hyperbel . . . . .	126
198.	Die Tangente halbiert den Innenwinkel der Brennstrahlen nach ihrem Berührpunkt . . . . .	126
199.	Die Asymptoten und Asymptoteneigenschaften . . . . .	126
200.	Hyperbeltangente und Brennstrahlen . . . . .	127
201.	Konstanz des Verhältnisses der Abstände eines Hyperbelpunktes von Brennpunkt und Leitlinie . . . . .	127
202.	Die Fußpunkte der von den Brennpunkten auf die Hyperbeltangenten gefällten Lote und die Endpunkte der um sich selbst verlängerten Lote gehören Kreisen an . . . . .	127
203—205.	Die Hyperbel und zwei Tangenten. Tangente und Asymptoten	127
206.	Die stereographischen Projektionen der Berührkreise der Dandelinischen Kugeln. Drehkegel durch die Hyperbel	129

### Die Parabel.

207.	Der Parabelschnitt. Elemente der Schnittkurve. Ähnlichkeit der Parabeln . . . . .	129
208.	Gleiche Neigung der Parabeltangente gegen Achse und zugehörigen Brennstrahl . . . . .	130
209.	Die stereographische Projektion des Berührkreises der Dandelinischen Kugel. Tangente, Scheiteltangente und Leitlinie . . . . .	131
210.	Die Parabel und zwei Tangenten . . . . .	131

211. Drehkegel durch die Parabel. Parabel und Kegel, dessen Leitlinie sie ist und dessen Scheitel senkrecht über einem ihrer Brennpunkte liegt . . . . . 132
212. Aus einem gegebenen Drehkegel eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel von bekannter Gestalt auszuschneiden . . . . . 132

### Fünfter Abschnitt.

#### Die Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises.

213. Pol und Polare beim Kreis . . . . . 134
214. 215. Konjugierte Punkte und Gerade bezüglich des Kreises . . 135
216. 217. Das Polardreieck. Eingeschriebenes Viereck und umgeschriebenes Vierseit beim Kreis . . . . . 136
218. Kongruente Strahlbüschel und projektive Punktreihen beim Kreise . . . . . 138
219. 220. Die Sätze von Pascal und Brianchon und ihre Sonderfälle . 138
221. Die perspektive Lage zweier Kreise, insbesondere mit je drei vorgegebenen entsprechenden Punkten . . . . . 140
- 222—225. Die allgemeine Zentralprojektion des Kreises ein Schnitt des schiefen Kreis Kegels. Übertragung der Kreiseigenschaften und -sätze auf die Kegelschnitte: Erzeugung durch projektive Gebilde, Sätze von Pascal und Brianchon, Bestimmung durch fünf Punkte bzw. Tangenten und Konstruktion weiterer Punkte und Tangenten. Pol und Polare. Konjugierte Punkte und Geraden . . . . . 142
226. Kreis und Kegelschnitt in perspektiver Lage . . . . . 144
227. Ellipse, Hyperbel und Parabel als perspektive Bilder des Kreises . . . . . 144
228. Identität der Kegelschnitte und perspektiven Bilder des Kreises 146
- 229—233. Zusammenhang zwischen Polaren- und Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte aus den Beziehungen der konjugiert rechtwinkligen Geraden zu ihnen und aus der Polarenbeziehung zwischen Brennpunkt und Leitlinie . . 147

### Sechster Abschnitt.

#### Die Bewegungen im Raum.

234. Die einfachsten Bewegungen: Parallelverschiebung, Spiegelung und Drehung . . . . . 151

#### Die Parallelverschiebung oder Schiebung.

235. 236. Die Schiebung. Definition und Elemente. Zusammensetzung mehrerer Schiebungen zu einer einzigen . . . . . 152

237—240.	Anwendungen: Die reduzierte Schiebung und Untersuchung von Lagebeziehungen zwischen ähnlichen Punktreihen, ähnlichen ebenen Figuren, beliebigen Parallelogrammen bzw. Parallelepipeden und zwischen symmetrischen Figuren im Raum . . . . .	153
----------	---	-----

### Spiegelung an einer Ebene und Drehung um eine Achse.

241.	Die Spiegelung und Drehung. Definition und Ergebnisse	156
242.	Zwei aufeinander folgende Spiegelungen sind durch eine Drehung ersetzbar . . . . .	158
243. 244.	Zwei aufeinander folgende Drehungen mit parallelen und mit sich schneidenden Achsen sind durch eine einzige ersetzbar . . . . .	158
245.	Die Umklappung. Zwei Umklappungen um sich schneidende Achsen sind durch eine Drehung ersetzbar . . . .	160
246.	Beziehungen zwischen besonderen Drehungen und Schiebungen	160
247.	Die Drehung um einen Punkt . . . . .	161
248.	Bewegungsbeziehungen zweier Geraden, die kongruente bzw. projektive Punktreihen tragen . . . . .	162
249.	Die Relativachse für zwei beliebige kongruente Gebilde im Raum . . . . .	163
250. 251.	Die Relativebene und Relativachse für zwei beliebige symmetrische Gebilde im Raum. Eigenschaften der Relativebene und des Spurpunktes der Relativachse in ihr . . .	165
252. 253.	Kongruente und symmetrische Projektionen zweier kongruenter Dreiecke im Raum . . . . .	167
254.	Die beiden Bewegungsbeziehungen zwischen zwei beliebigen kongruenten Dreiecken im Raum . . . . .	169
255.	Die zusammengesetzten Raumbewegungen: Schraubung, Drehspiegelung und Gleitspiegelung. Reihenfolge der Raumbewegungen und transponierte Operation. Die resultierende Schraubung mehrerer Schraubungen . . . . .	171

### Aufgaben:

256.	Einem Dreieck, dessen Seiten durch drei Punkte gehen, eine zweite Lage zu erteilen, so daß seine Seiten wiederum durch diese Punkte gehen. Eine Gerade um eine Achse zu drehen, daß sie einer Ebene parallel wird . . . . .	174
257.	Eine Drehung um einen Punkt zu ersetzen durch drei Drehungen um drei senkrechte Achsen durch ihn . . . .	175
258.	Eine Gerade um eine Achse zu drehen, daß sie eine feste Gerade trifft . . . . .	175

## Die Schraubenbewegung und die Schraubenlinie.

259.	Die Schraubenbewegung. Definition und Elemente . . . . .	177
260.	Die äquivalenten Kreiseigenschaften der Schraubenlinie . . .	178
261.	Ausbreitung der Schraubenlinie in die Ebene und Untersuchung der Schraubenbewegung . . . . .	180

## Anwendung:

262.	Eine Schraubung zu bestimmen, deren Achse einer gegebenen Geraden parallel ist und deren bezügliche Schraubenlinien drei vorgegebene beliebige Geraden bezw. die drei Seiten eines Dreiecks berühren . . . . .	182
	Alphabetische Sachfolge . . . . .	186

---

Mit 65 Figuren im Text.