

INHALTSVERZEICHNIS

| | |
|---|------------|
| Vorwort | V |
| Inhaltsverzeichnis | VII |
| 1 Zu den Grundlagen der Geometrie | 1 |
| 1.1 Historischer Überblick von <i>Euklid</i> bis <i>Hilbert</i> | 1 |
| 1.2 Die verschiedenen „Geometrien“ | 12 |
| 1.3 Affine Ebenen und ihre Koordinatenkörper | 15 |
| 1.3.1 Affine Ebenen | 15 |
| 1.3.2 Konstruktion des Koordinatenkörpers | 17 |
| 1.3.3 Automorphismen von \mathbb{A} | 20 |
| 1.3.4 Die Schließungssätze | 25 |
| 1.3.5 Der Strukturzusammenhang | 27 |
| 2 Geometrische Konstruktionen | 31 |
| 2.1 Einige klassische Probleme | 31 |
| 2.2 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal | 34 |
| 2.3 Das Delische Problem der Würfelverdoppelung | 39 |
| 2.4 Die Trisektion des Winkels | 40 |
| 2.4.1 Die Unmöglichkeit der Winkeldrittung | 41 |
| 2.4.2 Die Winkeldrittung nach <i>Archimedes</i> | 42 |
| 2.4.3 Eine Papierfaltkonstruktion | 44 |
| 2.5 Die Quadratur des Kreises | 45 |
| 2.6 Die Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks | 48 |
| 2.6.1 Elementare Überlegungen | 48 |
| 2.6.2 Das Ergebnis von <i>Gauß</i> | 49 |
| 2.6.3 Das regelmäßige 5-Eck | 53 |
| 2.6.4 Weitere n-Ecke | 60 |
| 3 Symmetriegruppen | 61 |
| 3.1 Die Gruppe der Bewegungen | 61 |
| 3.2 Symmetriegruppen von Polygonen | 72 |
| 3.2.1 Die Quadratgruppe Q | 72 |
| 3.2.2 Regelmäßige n-Ecke und Diedergruppen \mathbb{D}_n | 74 |
| 3.3 Symmetriegruppen von Polyedern | 76 |
| 3.3.1 <i>Platonische</i> Körper | 76 |
| 3.3.2 Bestimmung der Drehgruppen starrer Körper | 82 |
| 3.4 Bandornamente und ihre sieben Symmetriegruppen | 88 |
| 3.5 Periodische Pflasterungen der Ebene und die 17 ebenen kristallographischen Symmetriegruppen | 95 |
| 3.5.1 Periodische Pflasterungen der Ebene (Flächenornamente) | 95 |
| 3.5.2 Wandmuster und zugehöriges Gitter | 99 |
| 3.5.3 Die möglichen Gitter-Fixgruppen $\Gamma_O(G)$ | 102 |
| 3.5.4 $\Gamma(F)$ enthält nur Drehungen | 105 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 3.5.5 | $\Gamma(F)$ enthält Achsen- oder Gleitspiegelungen | 107 |
| 3.5.6 | Übersicht über die Symmetrietypen | 115 |
| 3.5.7 | Untersuchung von Flächenornamenten | 117 |
| 3.5.8 | Die fünfeckigen Kacheln von <i>Rosemary Grazebrook</i> | 120 |
| 3.5.9 | Die nichtperiodischen Flächenornamente von <i>Roger Penrose</i> | 121 |

4 Algebraische Gleichungen einer Variablen 126

| | | |
|-------|--|-----|
| 4.1 | Auflösung durch Radikale | 126 |
| 4.1.1 | Lösungen und Lösungsformeln | 126 |
| 4.1.2 | Algebraische Gleichungen vom Grad ≤ 4 | 128 |
| 4.1.3 | Die <i>Cardanoschen</i> Formeln | 130 |
| 4.2 | Elementare Methoden | 138 |
| 4.2.1 | Hilfsmittel aus Algebra und Analysis | 138 |
| 4.2.2 | Division mit Rest im Polynomring | 140 |
| 4.2.3 | Die Methode von <i>Sturm</i> | 143 |
| 4.3 | Die Nichtauflösbarkeit für $n \geq 5$ | 145 |
| 4.4 | Der Fundamentalsatz der Algebra | 152 |
| 4.4.1 | Der Fundamentalsatz | 152 |
| 4.4.2 | Der elementare Beweis nach <i>Argand</i> | 154 |
| 4.4.3 | Beweis mit dem Satz von <i>Liouville</i> | 155 |
| 4.4.4 | <i>Galoistheoretischer</i> Beweis | 156 |
| 4.4.5 | Topologische Beweisvariante nach <i>Gauß</i> | 157 |

5 Der Aufbau des Zahlensystems: Von den natürlichen zu den komplexen Zahlen 163

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.1 | Überblick | 163 |
| 5.2 | Die natürlichen Zahlen | 170 |
| 5.2.1 | Konstruktion von \mathbb{N} als „Kardinalzahlen“ | 171 |
| 5.2.2 | Konstruktion von \mathbb{N} als „Ordinalzahlen“ | 171 |
| 5.2.3 | Der konstruktivistische Ansatz | 173 |
| 5.2.4 | Die axiomatische Charakterisierung | 173 |
| 5.2.5 | Die <i>g</i> -adische Zahldarstellung | 174 |
| 5.3 | Die Erweiterung von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} | 176 |
| 5.4 | Die Erweiterung von \mathbb{Z} nach \mathbb{Q} | 177 |
| 5.5 | Die Erweiterung von \mathbb{Q} nach \mathbb{R} | 179 |
| 5.5.1 | Die Entdeckung der Irrationalität | 179 |
| 5.5.2 | Die Konstruktion von \mathbb{R} | 182 |
| 5.6 | Die Erweiterung von \mathbb{R} nach \mathbb{C} | 186 |
| 5.7 | Das <i>Cantorsche</i> Diskontinuum und andere Fraktale | 192 |
| 5.7.1 | Das <i>Cantorsche</i> Diskontinuum | 192 |
| 5.7.2 | Fraktale Dimension | 196 |
| 5.7.3 | „Zufallsfraktale“ | 200 |

Literaturverzeichnis 207

Stichwortverzeichnis 210