

# Inhalt

<b>Einleitung</b>	<b>10</b>
<b>Teil 1</b>	
<b>Historische Entwicklung, Curriculumentwicklung und didaktische Einzelfragen</b>	<b>16</b>
1.1 Historische Entwicklung der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra	17
1.1.1 Entwicklung der klassischen Analytischen Geometrie	18
1.1.2 Lineare Gleichungssysteme, Determinanten und Matrizen	21
1.1.3 Entwicklung früher geometrischer Kalküle: LEIBNIZ, MÖBIUS, BELLAVITIS	24
1.1.4 Von den komplexen Zahlen zu HAMILTONS Quaternionenkalkül	31
1.1.5 Entwicklung der Vektoranalysis aus dem Quaternionenkalkül	35
1.1.6 Ursprünge der Vektorraumtheorie bei GRASSMANN	36
1.1.7 Erste Axiomatisierungen der Vektorraumstruktur durch PEANO und WEYL	40
1.1.8 Etablierung des axiomatischen Vektorraumbegriffs durch die Funktionalanalysis	43
1.1.9 Beiträge der Körpertheorie zur Entwicklung der Linearen Algebra	46
1.1.10 Entwicklung der Linearen Algebra im 20. Jahrhundert	48
1.1.11 Zusammenfassung	50
1.2 Analytische Geometrie und Lineare Algebra in der Schulmathematik	50
1.2.1 Klassische Koordinatengeometrie	52
1.2.2 Einführung der Vektorrechnung in den Mathematikunterricht	52
1.2.3 Formal-axiomatische Lineare Algebra	55
1.2.4 Gegenentwürfe zu einer formal-axiomatischen Linearen Algebra	57
1.2.5 Derzeitig gültige Lehrpläne	61
1.2.6 Aktuelle didaktische Diskussion	64
1.3 Didaktische Einzelfragen	66
1.3.1 Vektorbegriff	66
1.3.2 Skalarprodukt	74
1.3.3 Normalengleichung einer Ebene	78
1.4 Ein Lehrgang zur Analytischen Geometrie	81

<b>Teil 2</b>	
<b>Schülerkonzepte und ihre Entstehung</b>	<b>85</b>
2.1 Empirische Befunde zur Analytischen Geometrie	86
2.1.1 Internationaler Mathematikleistungstest TIMSS/III	86
2.1.2 Schülerkonzepte zur Sekundarstufen-I-Geometrie	88
2.1.3 Schülerkonzepte und Dynamische Geometrie-Software (DGS)	95
2.1.4 Studierendenkonzepte zum Kurvenbegriff	96
2.1.5 Dokumentation der Lösung einer Klausuraufgabe	97
2.1.6 Schüler- und Studierendenkonzepte zum Vektorbegriff und zu vektorieller Analytischer Geometrie	99
2.1.7 Schülerkonzepte zum Vektorbegriff in Mathematik und Physik	100
2.1.8 Schülerkonzepte zur Einführung des Vektorbegriffs	102
2.2 Untersuchung zum Vektorbegriff in Klasse 8	103
2.3 Untersuchung zum Vektorbegriff in der Sekundarstufe II	110
2.4 Befunde zum Lösen geometrischer Probleme	123
2.5 Verstehen im Mathematikunterricht	126
2.5.1 Verstehen als Prozess individueller Sinnkonstruktion	126
2.5.2 Beschreibungsmodell für Verstehensprodukte	128
2.5.3 Kriterien zur Evaluierung des Schülerverstehens	130
2.5.4 Schülerverstehen und unterrichtliches Sinnangebot	134
2.5.5 Verstehen und Verständnis	136
2.6 Erklärungsmodelle für die Entstehung individueller Konzepte	138
2.6.1 Schema-Theorien und Aufmerksamkeitsfokussierung	139
2.6.2 Beschreibungsmodell für Fehlerprozesse beim Lösen von Gleichungen	140
2.6.3 Mikrowelten und Subjektive Erfahrungsbereiche	143
2.6.4 Rahmung, Rahmungsdifferenzen und Modulation	148
<b>Teil 3</b>	
<b>Untersuchungsziele und -methoden</b>	<b>150</b>
3.1 Methodologische Grundlagen	150
3.1.1 Forschungsparadigma und Forschungsmethode	151
3.1.2 Stellung der Theorie im Forschungsprozess und Prinzip der Offenheit	152
3.1.3 Theoriebildung und Grounded Theory	154
3.1.4 Personenzentrierte Fallstudien	156
3.1.5 Pädagogische Handlungs- oder Aktionsforschung	158
3.2 Präzisierung der Untersuchungsziele	159

3.3	Rahmenbedingungen und Untersuchungsverlauf	161
3.4	Interviewführung	164
3.4.1	Interviews zur Erfassung von Schülerkonzepten	164
3.4.2	Fokussierte Interviews, Netzinterviews und Concept Mapping	167
3.4.3	Interviewleitfaden und Fragetechnik	171
3.5	Transkription der Interviews	175
3.6	Interpretation der Interviews	179
3.6.1	Vorüberlegungen zur Interpretation	180
3.6.2	Vorgehen bei der Interpretation	181
3.6.3	Einordnung des Interpretationsverfahrens	185
3.7	Verlauf der Theoriebildung	186

## Teil 4

<b>Personenzentrierte Fallstudien</b>	<b>190</b>	
4.1	Fallstudie Martina	193
4.1.1	Mittelpunkt einer Strecke	193
4.1.2	Vektorbegriff	196
4.1.3	Parametergleichung einer Geraden	199
4.1.4	Parametergleichung einer Ebene	208
4.1.5	Normalengleichung einer Ebene	210
4.1.6	Skalarprodukt	218
4.2	Fallstudie Ralf	222
4.2.1	Mittelpunkt einer Strecke	222
4.2.2	Vektorbegriff	226
4.2.3	Betrag eines Vektors und Skalarprodukt	230
4.2.4	Parametergleichung einer Geraden	236
4.2.5	Parametergleichung einer Ebene	248
4.2.6	Normalengleichung einer Ebene	252
4.3	Fallstudie Sabine	257
4.3.1	Normalengleichung einer Ebene	257
4.3.2	Parametergleichung einer Ebene	263
4.3.3	Normalengleichung einer Ebene	270
4.3.4	Vektorbegriff	274
4.3.5	Mittelpunkt einer Strecke	281
4.3.6	Betrag eines Vektors	282
4.3.7	Skalarprodukt	288

4.4	Fallstudie Wolfgang	289
4.4.1	Mittelpunkt einer Strecke	289
4.4.2	Vektorbegriff	292
4.4.3	Betrag eines Vektors	299
4.4.4	Parametergleichung einer Geraden	302
4.4.5	Parametergleichung einer Ebene	306
4.4.6	Normalengleichung einer Ebene	309
4.5	Fallstudie Christina	315
4.5.1	Mittelpunkt einer Strecke	316
4.5.2	Vektorbegriff	318
4.5.3	Parametergleichung einer Geraden	321
4.5.4	Parametergleichung und Normalengleichung einer Ebene	329
4.6	Fallstudie Helmut	336
4.6.1	Mittelpunkt einer Strecke	336
4.6.2	Vektorbegriff	339
4.6.3	Parametergleichung einer Geraden	345
4.6.4	Parametergleichung einer Ebene	350
4.6.5	Normalengleichung einer Ebene	353
<b>Teil 5</b>		
<b>Kategorisierung von Schülerkonzepten und Diskussion von Einflussfaktoren</b>		<b>358</b>
5.1	Sichtweisen von Analytischer Geometrie	359
5.1.1	Schülerkonzepte	359
5.1.2	Vorerfahrungen und Aufmerksamkeitsfokussierung	363
5.1.3	Visualisierungen	366
5.1.4	Einordnung in fachlich-epistemologische Kategorien	369
5.2	Vektorbegriff	371
5.2.1	Schülerkonzepte	371
5.2.2	Lernbiographien und curriculare Ausrichtung des Kurses	374
5.3	Parametergleichung einer Geraden	377
5.3.1	Schülerkonzepte	377
5.3.2	Funktionales Denken	381
5.3.3	Variablenbegriff	383
5.3.4	Aufmerksamkeitsfokussierung und Ziele von Zeichnungen	385
5.3.5	Orientierung an Standardaufgaben	388
5.4	Parametergleichung einer Ebene	389

---

5.5	Normalengleichung einer Ebene	391
5.5.1	Schülerkonzepte	392
5.5.2	Algebraische Struktur der Normalengleichung	394
<b>Teil 6</b>		
<b>Rück- und Ausblick</b>		<b>396</b>
6.1	Curriculare Folgerungen	396
6.1.1	Vektorbegriff	397
6.1.2	Lerninhalte der Analytischen Geometrie	400
6.2	Schülerkonzepte als Forschungsgegenstand	403
6.2.1	Forschungsmethoden	403
6.2.2	Forschungsfragen	404
<b>Literatur</b>		<b>405</b>