

Inhaltsverzeichnis

Symbole	XI
Übersicht über die Axiome	XII
Einleitung	1
I. Inzidenz- und Ordnungsaxiome	6
A. Geraden und Parallelen	6
1. Das Mengenschema	6
2. Inzidenzaxiome	6
3. Parallelprojektion	8
4. Achsensysteme	9
B. Ordnungsaxiome	10
5. Ordnungsstruktur jeder Geraden	10
6. Übertragungsaxiome	11
7. Teilung der Ebene durch eine Gerade	12
Übungen zum Kapitel I	13
II. Axiome der affinen Struktur	17
A. Affine Struktur der Geraden von Π	17
8. Das erste Axiom der affinen Struktur	17
9. Isomorphismus zwischen \mathbb{R} und den zentrierten Geraden von Π	17
B. Struktur der additiven Gruppe von $(\Pi, 0)$	20
10. Das Übertragungsaxiom	20
11. Parallelprojektionen und Parallelogramme	20
12. Die Addition auf der Ebene $(\Pi, 0)$ und ihre Gruppenstruktur	21
C. Translationen der Ebene Π	24
13. Kennzeichnung der Translationen	24
14. Isomorphismus der Gruppen $(\Pi, 0)$	24
15. Freie Vektoren und die Chasles-Relation	25
16. Auswirkungen der Translationen auf die orientierten Geraden	26
D. Vektorraum-Struktur von $(\Pi, 0)$	28
17. Zusammenfassung und Definition des Vielfachen eines Vektors	28
18. Linearität der Parallelprojektion	28
19. Satz zur Vektorstruktur	30
20. Basis und Koordinaten. Gleichung einer Geraden	30
21. Die zentrischen Streckungen	31
22. Isomorphie der Vektorräume $(\Pi, 0)$	33
23. Struktur des Vektorraumes auf der Menge der Translationen	34
E. Dilatationen der Ebene	34
24. Kennzeichnung der Dilatationen	34
25. Die Gruppe der Dilatationen	35
26. Untergruppen	36
27. Dilatationen von Teilmengen von Π	37
F. Ergänzungen	38
28. Einige Themen	38
29. Schrägspiegelungen	38
Übungen zum Kapitel II	39

III.	Axiome der metrischen Struktur	41
A.	Senkrechte	41
	30. Axiome des Senkrechtstehens	41
	31. Senkrechte Richtungen	41
	32. Affine Eigenschaften metrischer Erscheinungen	42
	33. Projektion eines von einem Punkt ausgehenden Paares von Halbgeraden	43
B.	Das Skalarprodukt	44
	34. Axiom der Symmetrie	44
	35. Norm und Skalarprodukt	44
	36. Identitäten und Ungleichungen	45
	37. Invarianz von Distanz und Skalarprodukt bei der Translation	46
	38. Skalarprodukt auf dem Vektorraum der Translationen	48
C.	Elementare metrische Eigenschaften	49
	39. Metrische Eigenschaften bei Parallelogrammen und Dreiecken	49
	40. Orthogonalprojektion	52
	41. Mittelsenkrechte	53
	42. Trägheitsmomente	54
	43. Skalarprodukt und Distanz bei beliebiger Basis	55
IV.	Isometrien. Ähnlichkeitsbildungen. Spiegelungen einer Menge	56
A.	Isometrien	56
	44. Achsenspiegelungen und Punktspiegelungen	56
	45. Isometrien	57
	46. Die Gruppe der Isometrien um einen Punkt	59
	47. Paarige und unpaarige Isometrien	62
	48. Struktur einer Isometrie	64
B.	Ähnlichkeitsabbildungen	65
	49. Haupteigenschaften	65
	50. Paarige und unpaarige Ähnlichkeitsabbildungen	66
	51. Die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen um einen Punkt	67
	52. Struktur einer Ähnlichkeitsabbildung	69
	53. Klassifikation der abgeschlossenen Gruppen der Ähnlichkeitsabbildungen	70
C.	Stabile Mengen in bezug auf eine Gruppe von Transformationen	72
	54. Regelmäßigkeit einer Menge	72
	55. Konstruktion regelmäßiger Paare (E, E)	73
	56. Symmetrie-Elemente einer gegebenen Menge	74
	Übungen zum Kapitel IV	76
V.	Die Winkel	79
A.	Die Gruppe der Winkel	79
	57. Die Schwierigkeiten des Winkelbegriffs	79
	58. Definition und Bezeichnungen	80
	59. Winkelsumme eines ebenen geschlossenen Polygons	82

B.	Winkel und Ähnlichkeitsabbildungen	83
	60. Symmetrie eines Winkels	83
	61. Transformation eines Winkels durch eine Ähnlichkeitsabbildung	83
	62. Charakterisierung der Drehungen	84
	63. Charakterisierung der Ähnlichkeitsabbildungen	85
	64. Halbieren eines Winkels	85
	65. Winkel zweier Geraden	86
VI.	Orientierung	88
	66. Schwierigkeiten des Begriffs	88
	67. Orientierung von Teilmengen von Π	88
	68. Andere geometrische Gebilde	89
	69. Paare von Halbgeraden	91
	70. Orientierung und stetige Deformation	93
	71. Die Bewegungen	94
	Übungen zum Kapitel VI	95
VII.	Trigonometrie	98
A.	Elementare Trigonometrie	98
	72. Kosinus und Sinus eines Winkels in bezug auf eine Basis	98
	73. Matrix einer Drehung in bezug auf eine positive orthonormale Basis	99
	74. Additionstheoreme	100
B.	Winkelmaß	101
	75. Auf der Suche nach einer Definition	101
	76. Definition und unmittelbare Folgerungen	102
	77. Skizze eines Existenzbeweises für stetige Abbildungen von \mathbb{R} auf \mathbb{T}	104
	78. Zahlenwert eines Winkels	105
	Übungen zum Kapitel VII	106
VIII.	Der Kreis	107
	79. Definition und Symmetrien	107
	80. Ähnliche Abbildung	108
	81. Konvexität der Kreisscheibe	109
	82. Schnitt Kreis-Gerade	109
	83. Tangente an einen Kreis	110
	84. Schnitt zweier Kreise	110
	85. Kreisgleichung	111
	86. Einige kennzeichnende Eigenschaften	112
	87. Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis	114
	Übungen zum Kapitel VIII	115
IX.	Der Raum	117
A.	Die Axiome	117
	88. Wahl einer Methode	117
	89. Axiome des dreidimensionalen Raumes	118
	90. Erste Folgerungen	119

B.	Affinstruktur des Raumes	120
	91. Der zentrierte Raum $(\mathbb{R}, 0)$	120
	92. Translationen	122
	93. Parallelismus	122
	94. Folgerungen aus dem Dimensionsaxiom	123
C.	Metrische Struktur des Raumes	125
	95. Translationen und Senkrechtstehen	125
	96. Das skalare Produkt	126
	97. Anwendung auf zwei klassische Theoreme	127
	98. Einige Themen	128
	Übungen zum Kapitel IX	129
X.	Anhang	131
A.	Axiomatik auf metrischer Basis	131
	99. Erste Axiome	131
	100. Spiegelungsaxiom	132
	101. Spiegelung an einer Geraden	132
	102. Senkrechte und Projektionen	133
	103. Punktspiegelung und Produkte von Spiegelungen	136
	104. Schema der Weiterentwicklung	137
B.	Axiomatik der nichteuklidischen Geometrie	138
C.	Axiomatik der „Anfangsgeometrie“	139
D.	Schema einer anderen Winkeldefinition	141
E.	Literatur	143
	Sachregister	145