

Inhalt

<i>Einführung - Zahlen in Umgangssprache und Theorie</i>	9
<i>I. Natürliche Zahlen</i>	15
1. Axiomatische Grundlegung der natürlichen Zahlen	16
1.1 Die Axiome	17
1.2 Vollständige Induktion	24
1.3 Ergänzungen zur Axiomatik der natürlichen Zahlen	27
1.4 Das Rechnen mit natürlichen Zahlen	31
1.5 Die Anordnung der natürlichen Zahlen	38
1.6 Der Rekursionssatz	45
1.7 Modelle des Axiomensystems der natürlichen Zahlen	49
1.8 Zahlwortreihe und Abzählen von Mengen	54
2. Endliche Kardinalzahlen	58
2.1 Äquivalente Mengen, Klassenbildung, endliche Mengen	60
2.2 Das Rechnen mit Kardinalzahlen	73
2.3 Die Anordnung endlicher Kardinalzahlen	78
2.4 Die endlichen Kardinalzahlen als Modell der Peano-Axiome ..	83
3. Zahlen und Größen	87
3.1 Größen als Äquivalenzklassen	89
3.2 Die Struktur eines Größenbereichs - minimale Größenbereiche	95
3.3 Zahlen als Abstraktionen von Größenbereichen und Operatoren	98
4. Didaktische Anmerkungen zu den natürlichen Zahlen	100
5. Übungen	107

II. Ganze und rationale Zahlen	109
1. Grundgedanken der Zahlbereichserweiterung	110
1.1 Subtraktion und Division, Halbgruppe und Gruppe	110
1.2 Die Konstruktion neuer Zahlbereiche und das Prinzip der Einbettung	113
2. Ganze Zahlen - die Konstruktion von \mathbb{Z} aus \mathbb{N}_0	117
2.1 Die Menge \mathbb{Z}	117
2.2 Das Rechnen mit ganzen Zahlen	119
2.3 Die Anordnung der ganzen Zahlen	123
2.4 Die Einbettung von \mathbb{N}_0 in \mathbb{Z}	127
3. Rationale Zahlen - die Konstruktion von \mathbb{Q} aus \mathbb{Z}	131
3.1 Die Sonderrolle der Null	131
3.2 Die Menge \mathbb{Q}	131
3.3 Das Rechnen mit rationalen Zahlen	135
3.4 Die Anordnung der rationalen Zahlen	139
3.5 Die Einbettung von \mathbb{Z} in \mathbb{Q}	143
4. Didaktische Modelle - Bruchzahlen und negative Zahlen	146
4.1 Zugänge zur Bruchrechnung	147
4.2 Zugänge zum Rechnen mit negativen Zahlen	150
4.3 Didaktische Probleme der Zahlbereichserweiterungen	154
5. Übungen	157
III. Reelle Zahlen	159
1. Problemstellung und Grundgedanken einer Erweiterung des Zahlbereichs \mathbb{Q}	159
1.1 Die Unvollständigkeit des Körpers \mathbb{Q} und das Prinzip der Intervallschachtelung	159
1.2 Das Rechnen mit monotonen Folgen	165
2. Die Konstruktion von \mathbb{R} aus \mathbb{Q}	173
2.1 Die Menge \mathbb{R}	173
2.2 Das Rechnen mit reellen Zahlen	177
2.3 Die Anordnung der reellen Zahlen	184

Inhalt

3.	Die Einbettung von \mathbb{Q} in \mathbb{R} - \mathbb{R} als vollständig angeordneter Körper	188
4.	Andere Begründungen der reellen Zahlen	195
5.	Die Mächtigkeit der Menge \mathbb{R}	196
6.	Reelle Zahlen im Unterricht	201
7.	Übungen	210
 <i>IV. Komplexe Zahlen</i>		211
1.	Die Konstruktion von \mathbb{C} aus \mathbb{R}	211
2.	Die Menge der komplexen Zahlen als algebraisch abgeschlossener und vollständiger Körper - geometrische Deutung	216
3.	Übungen	222
 <i>Anhang</i>		
	Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben	223
	Symbole und Bezeichnungsweisen	233
	Literaturverzeichnis	234
	Register	237