

# Inhalt

## 1 Die Erweiterung von $\mathbf{N}$ nach $\mathbf{Q}^+$

	1.1	Größenbereiche	9
A	1.1.1	Beispiele für Größenbereiche	9
B	1.1.2	Die Struktur von Größenbereichen	17
C	1.1.3	Didaktische Anmerkungen zur Behandlung von Größenbereichen	18
	1.2	Die Einführung von Bruchzahlen über Größenbereiche	24
A	1.2.1	Auslegen kommensurabler Strecken	24
B	1.2.2	Definition von Bruchzahlen	25
C	1.2.3	Bruchzahlen als Operatoren	28
	1.3	Das Rechnen mit Bruchzahlen	32
A	1.3.1	Operieren mit Repräsentanten für Bruchzahlen	32
B	1.3.2	Relationen und Operationen in der Menge der Bruchzahlen	38
C	1.3.3	Das Operatormodell der Bruchrechnung	47

## 2 Die Einführung negativer Zahlen

	2.1	Die Erweiterung von $\mathbf{N}_0$ nach $\mathbf{Z}$	53
A	2.1.1	Würfeln um zwei Sorten von Gegenständen	53
	2.1.2	Ein Verschiebungsmodell	55
	2.1.3	Ein Verformungsmodell	58
B	2.1.4	Die Einbettung einer Halbgruppe in eine Gruppe	60
C	2.1.5	Die Einführung ganzer Zahlen im Unterricht	72
	2.2	Die Erweiterung der Menge der natürlichen Zahlen zum Ring der ganzen Zahlen	77
B	2.2.1	Zur Einführung	77
	2.2.2	Die Konstruktion des Gebildes $(\mathbf{Z}', +,  )$ aus $(\mathbf{N}_0, +,  )$	77
	2.2.3	Der Ring $(\mathbf{Z}, +, \cdot, \leq,  )$	79
C	2.2.4	Ein Vorschlag zur Behandlung der Multiplikation ganzer Zahlen im Unterricht	80
	2.3	Die Erweiterung der Menge der natürlichen Zahlen zum Körper der rationalen Zahlen	82
B	2.3.1	Zur Einführung	82
	2.3.2	Die Konstruktion des Halbkörpers $(\mathbf{Q}_0, +, \cdot,  , \leq)$ aus $(\mathbf{Q}^+, +,  )$	82
	2.3.3	Die Konstruktion des Körpers der rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$	86
C	2.3.4	Die Einführung negativer rationaler Zahlen im Unterricht	89

	2.4	Skizzieren der Erweiterung $\mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$ . . . . .	91
A	2.4.1	In $\mathbf{N}_0$ unlösbare Gleichungen . . . . .	91
B	2.4.2	Die Erweiterung von $\mathbf{N}_0$ nach $\mathbf{Z}$ . . . . .	93
	2.4.3	Die Erweiterung von $\mathbf{Z}$ nach $\mathbf{Q}$ . . . . .	95
	2.5	Beispiele für die Nichtabgeschlossenheit von $\mathbf{Q}$ . . . . .	98
A	2.5.1	Ein geometrischer Beweis . . . . .	98
	2.5.2	Ein arithmetischer Beweis . . . . .	100
	3	Lösungen der Aufgaben . . . . .	101
		Literatur. . . . .	116
		Sachverzeichnis . . . . .	117