

Inhaltsübersicht

VORWORT	9
EINFÜHRUNG	11
A ZAHLEN UND IHRE DARSTELLUNG	13
Zahlentabelle. • Entwicklung und Aufbau des Zahlensystems. • Rechenarten und ihr Zusammenhang • Quadratische Gleichung und komplexe Zahl • Darstellung durch Zahlengeraden • Darstellung der komplexen Zahl durch die Gaußsche Zahlenebene • Zahl gleich Punkt	17
B DAS RECHNEN MIT KOMPLEXEN ZAHLEN	18
ADDITION UND SUBTRAKTION Addition: Zeichnerische Darstellung als Parallelogramm, Vergleich mit der Vektorrechnung • Betrag und Argument der komplexen Zahl • Umformung einer Subtraktion in eine Addition	
MULTIPLIKATION ALS VERKÜRZTE ADDITION	21
Multiplikation einer reellen Zahl mit einer komplexen Zahl • Darstellung: eine zentrische Streckung	
MULTIPLIKATION KOMPLEXER FAKTOREN	23
Anwendung des Distributivgesetzes • Unklare geometrische Zusammenhänge der Ergebnisse • Verwendung von Betrag und Argument führt zu Multiplikationsregeln • Moivresche Formel und ihre Darstellung • Konstruktion des Betrages • Eindeutige Umkehrbarkeit des Produktes mit Hilfe der Argumente	
DIVISION KOMPLEXER ZAHLEN	31
Umkehrung der Multiplikation • Nenner rational machen • Nenner reell machen	
EULERSCHE FORMEL	34
Potenzen von -1 und i • Sinus-, Cosinus- und Exponentialreihe führen zur Eulerschen Formel • Vergleich der drei Darstellungen	

der komplexen Zahlen • $e^{i\pi} = -1$ • Natürlicher Logarithmus •
Quadratur des Kreises

POTENZEN ZWEITEN GRADES

37

Potenz als verkürzte Multiplikation • Exponent $n=2$ •
Moivresche Formel • Quadrieren komplexer Zahlen rechnerisch
und zeichnerisch • Rechnung gleich Abbildung von Menge z auf
Menge w

RIEMANNSCHE FLÄCHE (RF) UND DIMENSIONEN

41

Für $w = z^2$ besteht die RF aus zwei Blättern • Dimensionen und
die Grenzen unseres Vorstellungsvermögens • Unendlichkeit und
nullte Dimension • Mehrdeutigkeit und Eindeutigkeit • Definition im
Nullpunkt

QUADRATWURZELN

47

Zweideutigkeit der Quadratwurzeln • Eindeutige Darstellung mit
Hilfe der Riemannschen Fläche

POTENZEN UND WURZELN HÖHEREN GRADES

49

Bau der Riemannschen Flächen • Die dritte Wurzel an Beispielen •
Eindeutigkeit - Mehrdeutigkeit • Umrechnungen und
Vereinfachungen von Exponenten

KOMPLEXE FUNKTIONEN

57

Allgemeine Einführung

C DIE FUNKTION $w = \frac{1}{z}$

58

$w = \frac{1}{z}$ ALLGEMEINE VORAUSSETZUNGEN

58

Schreibweisen • Betrag einer komplexen Funktion • Grundfor-
men von $w = \frac{1}{z}$ • Geometrische Abbildung von $w = \frac{1}{z}$ • $w = \frac{1}{z}$
allgemein • Konstruktion des Betrages

ABBILDUNGEN VON GERADEN

62

Gerade $y = a \cdot x$ • Abbildung der Punktmenge $|z| > 1$ in die
Punktmenge $|w| < 1$ • Der Nullpunkt und das Unendliche

$w = \frac{1}{z}$ **ABBILDUNG VON GERADEN UND KREISEN** **65**

Abbildung von $y = 2 \cdot x - 1$: ergibt zeichnerisch keine Gerade; rechnerisch einen Kreis durch den Nullpunkt • Abbildung von Kreisen in verschiedener Lage • Umlaufsinn der Kreislinien • Die Kreisgleichung in Polarkoordinaten ergibt den Cosinussatz • Untersuchung der verschiedenen Kreislagen

$w = \frac{1}{z}$ **RIEMANNSCHE ZAHLENKUGEL** **77**

Darstellung von Kugelflächen auf einer Ebene in der Geographie • Projektion einer Gaußschen Zahlenebene auf eine Kugel • Abbildung $w = \frac{1}{z}$ ist auf der Kugel eine Kongruenzabbildung • Unendlich ferner Punkt • Geraden und Kreise der Ebene werden in Kreise auf der Kugel abgebildet

$w = \frac{1}{z}$ **ABBILDUNG VON PARABEL UND HYPERBEL** **82**

Hyperbeln werden in eine Lemniskate abgebildet und Parabeln in Zissoiden • Asymptote und Krümmungskreis

D POTENZEN UND WURZELN **88**

POTENZFUNKTION ZWEITEN GRADES

Veranschaulichung der Riemannschen Fläche • Abbildung von Geraden parallel zur reellen Achse mit der Funktion $w = z^2$ und Abbildung von Geraden parallel zur imaginären Achse: Wir erhalten zwei sich rechtwinkelig schneidende Parabelscharen • Untersuchung von Geraden durch den Nullpunkt • Abbildung beliebiger Geraden

QUADRATWURZELN **96**

Wurzelfunktion als eindeutige Umkehrung • Aufgabe aus der Strömungslehre • Abbildung senkrecht zu den Koordinatenachsen verlaufender Geraden in Hyperbelscharen, die sich senkrecht schneiden
Beachtung der RF

POTENZFUNKTIONEN HÖHEREN GRADES **100**

$w = z^n$ • Komplizierte Gleichungen, wenn $n > 3$ gewählt wird

DER WURZELBEGRIFF **103**

Eindeutige Umkehrung der Wurzelfunktion unter Verwendung der Eulerschen Formel • Definition der Irrationalzahlen

E DIE e-FUNKTION	106
e-FUNKTION UND NATÜRLICHER LOGARITHMUS	
Umformung von $w = e^z$ • Betrag und Argument der Funktion	
• Abbildungen von Streifen parallel zur reellen Achse •	
Riemannsche Fläche für $w = e^z$ • Rolle des Nullpunktes	
ABBILDUNGEN MIT $w = e^z$	108
Abbildung von Geraden durch den Nullpunkt ergibt eine logarithmische Spirale • Logarithmusfunktion vieldeutig und eindeutig	
F DIE FUNKTION $w = z + \frac{1}{z}$	116
$w = z + \frac{1}{z}$ ALLGEMEIN	
Geometrische Konstruktion für einen Punkt • Konstruktion einer Bildfigur eines Kreises um den Nullpunkt ergibt eine Ellipse •	
Abbildung von Kreisen um den Nullpunkt allgemein ergeben paarweise sich deckende Ellipsen • Umkehrfunktion •	
Riemannsche Fläche	
STROMLINIENFORMEN	121
mit $w = z + \frac{1}{z}$	
ZUSAMMENFASSUNG	127
LÖSUNGEN	131
ANHANG	165
Berechnungen • Formeln • über bekannte Mathematiker	
ERGÄNZENDE LITERATUR	177