

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1 Lineare Algebra | 12 |
| 1.1 Vektorrechnung | 12 |
| 1.1.1 Grundlagen | 12 |
| 1.1.2 Lineare Abhängigkeit | 18 |
| 1.1.3 Vektorräume | 22 |
| 1.1.4 Dimension und Basis | 24 |
| 1.2 Matrizen | 26 |
| 1.2.1 Definition einer Matrix | 26 |
| 1.2.2 Elementare Rechenregeln für Matrizen | 28 |
| 1.2.2.1 Addition von Matrizen | 28 |
| 1.2.2.2 Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl | 29 |
| 1.2.2.3 Transposition von Matrizen | 29 |
| 1.2.3 Multiplikation von Matrizen mit Matrizen | 31 |
| 1.2.3.1 Grundlagen | 31 |
| 1.2.3.2 Inhaltliche Interpretation von Matrizenprodukten | 34 |
| 1.2.3.3 Einheitsmatrizen und Grundlagen zu inversen Matrizen | 40 |
| 1.2.3.4 Übungsaufgaben zur Matrizenmultiplikation | 44 |
| 1.3 Lineare Gleichungssysteme | 45 |
| 1.3.1 Strukturiertes Additionsverfahren | 45 |
| 1.3.2 Der Gauß-Algorithmus | 48 |
| 1.3.3 Mehrdeutige Lösungen | 52 |
| 1.3.4 Schema für den Gauß-Algorithmus | 55 |
| 1.3.5 Umgehen von Brüchen | 57 |
| 1.3.6 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme | 59 |
| 1.3.7 Weitere Zusammenhänge | 61 |
| 1.4 Determinanten, Rang und Inverse | 63 |
| 1.4.1 Determinanten | 63 |
| 1.4.1.1 Grundlagen | 63 |
| 1.4.1.2 Der Laplace Entwicklungssatz | 66 |
| 1.4.1.3 Der Zahlenwert einer Determinante | 69 |
| 1.4.1.4 Rechenregeln für Determinanten | 70 |
| 1.4.2 Rang einer Matrix | 72 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 1.4.3 | Inverse Matrizen | 75 |
| 1.4.3.1 | Grundlagen | 75 |
| 1.4.3.2 | Existenz der inversen Matrix | 76 |
| 1.4.3.3 | Bestimmung der Inversen mittels der adjungierten Matrix | 77 |
| 1.4.3.4 | Bestimmung der Inversen mittels des Gauß-Algorithmus | 80 |
| 1.4.3.5 | Einige spezielle inverse Matrizen | 82 |
| 1.4.4 | Übungsaufgaben | 83 |
| 1.4.5 | Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme | 88 |
| 1.4.5.1 | Mehrdeutige Lösungen und Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen | 88 |
| 1.4.5.2 | Die Cramersche Regel | 90 |
| 1.5 | Formales Rechnen mit Matrizen | 92 |
| 1.5.1 | Grundlagen | 92 |
| 1.5.2 | Übungsaufgaben | 98 |
| 1.6 | Konkrete Überprüfung auf lineare Abhängigkeit | 99 |
| 1.6.1 | Grundlagen | 99 |
| 1.6.2 | Übungsaufgaben | 103 |
| 1.7 | Überprüfung auf Vektorraumeigenschaften | 107 |
| 1.7.1 | Grundlagen | 107 |
| 1.7.2 | Unterräume | 111 |
| 1.7.3 | Bestimmung von Dimension und Basis des Vektorraumes | 115 |
| 1.8 | Lineare Optimierung | 117 |
| 1.8.1 | Grundlagen | 117 |
| 1.8.2 | Graphische Lösung | 119 |
| 1.8.3 | Spezifizierung der Optimierungsprobleme | 127 |
| 1.8.4 | Simplex Algorithmus | 130 |
| 1.8.5 | Schema zum Simplex Algorithmus | 140 |

| | |
|--|------------|
| 2 Folgen und Reihen | 142 |
| 2.1 Grundlagen | 142 |
| 2.2 Grenzwerte von Folgen | 146 |
| 3 Funktionen | 149 |
| 3.1 Begriff der Funktion | 149 |
| 3.2 Ganzrationale Funktionen | 151 |
| 3.3 Nullstellen von Funktionen | 152 |
| 3.4 Gebrochenrationale Funktionen | 154 |
| 3.5 Wurzelfunktionen | 155 |
| 3.6 Umkehrfunktionen | 157 |
| 3.7 Exponentialfunktion und Logarithmus | 159 |
| 3.7.1 Exponentialfunktionen | 159 |
| 3.7.2 Darstellung des Taschenrechners für sehr große und sehr kleine Zahlen | 161 |
| 3.7.3 Rechenregeln für Exponenten | 161 |
| 3.7.4 Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion | 162 |
| 3.7.5 Rechenregeln für Logarithmen | 164 |
| 3.8 Trigonometrische Funktionen | 165 |
| 3.8.1 Die Sinusfunktion | 165 |
| 3.8.2 Winkelmaße – Bogenmaß (rad) und Gradmaß (deg) | 166 |
| 3.8.3 Cosinus und Tangens | 166 |
| 3.8.4 Trigonometrische Umkehrfunktionen | 166 |
| 3.9 Grenzwerte von Funktionen | 167 |
| 3.9.1 Grenzwerte für x gegen unendlich | 167 |
| 3.9.2 Grenzwerte gegen eine reelle Zahl | 168 |
| 3.9.3 Regel von de l' Hospital | 174 |
| 3.9.4 Schema zur Regel von de l' Hospital | 176 |
| 3.9.5 Übungsaufgaben | 178 |
| 3.10 Stetige und unstetige Funktionen | 180 |

4 Differentialrechnung einer Veränderlichen 183

| | |
|---|------------|
| 4.1 Einführung | 183 |
| 4.2 Steigung einer Funktion | 184 |
| 4.2.1 Steigung einer Geraden | 184 |
| 4.2.2 Steigung von Sekante und Tangente | 185 |
| 4.2.3 Bestimmung der Steigung einer Funktion | 187 |
| 4.2.4 Differenzierbarkeit | 190 |
| 4.3 Ableitungen verschiedener Funktionen | 192 |
| 4.3.1 Ableitung für Potenzen von x | 192 |
| 4.3.2 Ableitungen mit Faktoren | 194 |
| 4.3.3 Ableitungen für Sinus- und Cosinusfunktionen | 195 |
| 4.3.4 Ableitungen von Exponentialfunktionen | 195 |
| 4.3.5 Ableitung von Umkehrfunktionen | 196 |
| 4.4 Ableitungen von verknüpften Funktionen | 199 |
| 4.4.1 Ableitungen von Summen und Differenzen | 199 |
| 4.4.2 Kettenregel | 200 |
| 4.4.3 Produktregel | 203 |
| 4.4.4 Quotientenregel | 205 |
| 4.5 Ableitungsübersicht | 206 |
| 4.6 Ableitungsübungen | 207 |
| 4.7 Bestimmung von Extremwerten | 210 |
| 4.7.1 Einführung | 210 |
| 4.7.2 Bestimmung von Hoch-, Tief- und Sattelpunkten | 210 |
| 4.7.2.1 Notwendige Bedingung | 210 |
| 4.7.2.2 Hinreichende Bedingung für Hoch- und Tiefpunkte | 212 |
| 4.7.3 Randextrema und Klassifizierung von Extrema | 216 |
| 4.7.4 Besonderheiten bei unstetigen Funktionen | 218 |
| 4.7.5 Besonderheiten bei streng monotonen Funktionen | 220 |
| 4.7.6 Schema für die Bestimmung und Klassifizierung von Extremstellen | 222 |
| 4.7.7 Übungsaufgaben | 224 |
| 4.8 Wendepunkte | 228 |

| | |
|---|------------|
| 4.9 Weitere Zusammenhänge | 230 |
| 4.9.1 Monotonie | 230 |
| 4.9.2 Konkave und konvexe Funktionen | 231 |
| 4.9.3 Newton-Verfahren | 233 |
| 4.9.3.1 Grundlagen | 233 |
| 4.9.3.2 Berechnung von Nullstellen | 235 |
| 4.9.3.3 Konvergenz des Newton-Verfahrens | 238 |
| 4.9.4 Mittelwertsatz | 240 |
| 4.9.5 Elastizitäten | 241 |
| 5 Integralrechnung | 246 |
| 5.1 Grundlagen | 246 |
| 5.2 Berechnung von Integralen | 249 |
| 5.3 Bestimmtes Integral | 250 |
| 5.4 Flächenberechnung | 252 |
| 5.5 Bestimmung von einfachen Integralen | 254 |
| 5.5.1 Einfache Stammfunktionen | 254 |
| 5.5.2 Integrale von Funktionen, die addiert oder mit Konstanten multipliziert werden | 256 |
| 5.5.3 Einfache verkettete Funktionen | 257 |
| 5.6 Komplexere Integrationsmethoden | 258 |
| 5.6.1 Substitutionsregel | 258 |
| 5.6.1.1 Grundlagen | 258 |
| 5.6.1.2 Substitution als Umkehrung der Kettenregel | 260 |
| 5.6.1.3 Substitution zur Umformung des Integrals | 262 |
| 5.6.1.4 Substitution bei bestimmten Integralen | 264 |
| 5.6.1.5 Schema zur Integration mittels Substitution | 266 |
| 5.6.2 Partielle Integration | 267 |
| 5.7 Tabelle wichtiger Stammfunktionen | 269 |
| 5.8 Integralfunktionen | 272 |
| 5.9 Uneigentliche Integrale | 273 |
| 5.10 Berechnung von Summen mittels Integralen | 276 |
| 5.11 Übungsaufgaben | 277 |

6 Differential- und Differenzgleichungen 280

| | |
|--|------------|
| 6.1 Differentialgleichungen | 280 |
| 6.1.1 Ökonomischer Bezug | 280 |
| 6.1.2 Einteilungen von Differentialgleichungen | 281 |
| 6.1.3 Trennung der Variablen | 282 |
| 6.1.4 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung | 285 |
| 6.1.4.1 Homogene lineare Differentialgleichung | 286 |
| 6.1.4.2 Inhomogene lineare Differentialgleichung | 287 |
| 6.1.5 Aufgaben zu Differentialgleichungen | 289 |
| 6.2 Differenzgleichungen | 291 |

7 Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher 294

| | |
|--|------------|
| 7.1 Grundlagen | 294 |
| 7.2 Partielle Ableitungen | 297 |
| 7.2.1 Grundlagen | 297 |
| 7.2.2 Der Gradient einer Funktion | 299 |
| 7.2.3 Übungen zu partiellen Ableitungen | 300 |
| 7.3 Extremwerte von Funktionen mit mehreren Variablen | 303 |
| 7.4 Lagrangetechnik | 308 |
| 7.4.1 Grundlagen | 308 |
| 7.4.2 Hinreichende Bedingung | 312 |
| 7.4.3 Beispielaufgaben | 313 |
| 7.4.3.1 Funktionen mit mehreren Nebenbedingungen | 313 |
| 7.4.3.2 Verknüpfte Funktionen | 315 |
| 7.4.3.3 Minimalkostenkombination | 317 |
| 7.5 Totales Differential | 319 |
| 7.6 Abbildungen in den \mathbb{R}^n | 323 |
| 7.6.1 Ableitungsmatrizen | 323 |
| 7.6.2 Mehrdimensionale Kettenregel | 324 |
| 7.6.3 Aufgaben zur mehrdimensionalen Kettenregel | 324 |

8 Finanzmathematik 327

| | |
|--|------------|
| 8.1 Grundlagen | 327 |
| 8.2 Auf- und Abzinsen | 327 |
| 8.3 Konstante Zahlungsströme (Renten) | 330 |
| 8.4 Vorschüssige Zinszahlungen | 332 |

| | |
|--|------------|
| 9.1 Lösungen von Gleichungen | 333 |
| 9.1.1 Lineare Gleichungen | 333 |
| 9.1.2 Quadratische Gleichungen | 334 |
| 9.1.2.1 Quadratische Ergänzung | 334 |
| 9.1.2.2 pq-Formel | 335 |
| 9.1.2.3 Weitere Zusammenhänge | 336 |
| 9.1.3 Homogene Gleichungen höherer Ordnung | 337 |
| 9.1.4 Inhomogene Gleichungen höherer Ordnung | 337 |
| 9.1.5 Gleichungen mit Quotienten | 339 |
| 9.1.6 Nicht lineare Gleichungssysteme | 339 |
| 9.1.7 Ungleichungen | 340 |
| 9.2 Bruchrechnen | 343 |
| 9.3 Grundlegende Rechenregeln | 346 |
| 9.3.1 Wurzeln und Potenzen | 346 |
| 9.3.2 Multiplizieren von Klammern | 346 |
| 9.4 Typische Fehler | 348 |
| 9.5 Formeln | 350 |
| 9.5.1 Rechenregeln für Matrizen | 350 |
| 9.5.2 Rechenregeln für Determinanten | 350 |
| 9.5.3 Rechenregeln für den Rang | 351 |
| 9.5.4 Inverse Matrizen | 352 |
| 9.5.5 Begriffe zu Matrizen | 352 |
| 9.5.6 Lineare Gleichungssysteme | 353 |
| 9.5.7 Bruchrechnen | 354 |
| 9.5.8 Rechnen mit Exponenten | 354 |
| 9.5.9 Logarithmen | 355 |
| 9.5.10 Wichtige Identitäten | 355 |
| 9.5.11 Ableitungsregeln | 355 |
| 9.5.12 Ableitungsübersicht | 356 |
| 9.5.13 Integrationsregeln | 356 |
| 9.5.14 Tabelle wichtiger Stammfunktionen | 357 |
| 9.6 Mathematische Zeichen | 358 |
| 9.7 Griechisches Alphabet | 360 |
| Stichwortverzeichnis | 362 |