

# Inhaltsverzeichnis

<b>0. Einleitung</b>	5
<b>I. Zur Bedeutung von Iterationen in der Mathematik</b>	8
1. Iterative Denkweisen beim Aufbau des Zahlensystems	9
2. Iterative Verfahren zum Lösen von Gleichungen	11
3. Iterationen und dynamische Prozesse	14
4. Die Iteration als Strukturelement von Algorithmen	16
<b>II. Iterationen im Mathematikunterricht</b>	20
1. Iterationsverfahren zum Lösen von Gleichungen	20
1.1 Bestimmung irrationaler Zahlen	20
1.2 Näherungsweise Lösen von Gleichungen	21
1.3 Fixpunktproblematik	23
1.4 Anwendungsaufgaben	24
2. Iterationen und Folgenbegriff	25
2.1 Folgen als Objekte	26
2.2 Folgen als Werkzeuge	27
2.3 'Chaotische' Folgen	28
2.4 Wandel der Sichtweise des Folgenbegriffs	29
3. Iterationen und Algorithmen	33
3.1 Algorithmisches Arbeiten	33
3.2 Neue Impulse durch den Rechneinsatz	34
3.3 Iterationen mit dem Taschenrechner	35
3.4 Überraschendes Fixpunktverhalten	37
3.5 Visualisierung von iterativen Prozessen mit Hilfe des Computers	39
4. Zur Bedeutung von Iterationen im Lernprozeß zum Funktionsbegriff	40
4.1 Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht	41
4.2 Entdecken und Bilden von Funktionseigenschaften	43
4.3 Eigenschaften von Iterationsfolgen	44
4.4 Iterierte Funktionen	45
5. Strategien zum Lehren des Iterationsbegriffs	48
5.1 Lokale Strategien	48
5.2 Regionale Strategien	50
5.2.1 Die Iteration als Schlüsselbegriff	50
5.2.2 Iterations- und Konvergenzbegriff	51
5.3 Globale Strategien des Begriffslehrens	53
5.3.1 Ein Stufenschema zum Erwerb des Iterationsbegriffs	53
5.3.2 Algorithmische und funktionale Sichtweise	55
5.3.3 Methodische Varianten beim Lehren des Iterationsbegriffs	56

<b>III. Das Verständnis von Iterationen</b>	60
1. Phänomenologische Grundlagen	60
2. Die Iteration als Leitidee im Mathematikunterricht	62
3. Iteratives Arbeiten im Problemlöseprozeß	63
3.1 Experimenteller Mathematikunterricht	63
3.2 Heuristik	64
3.3 Arbeiten mit Tabellendarstellungen von Funktionen	65
3.4 Suchprozesse	66
4. Iteratives Denken	68
5. Iterationen und funktionales Denken	71
6. Darstellen von Funktionen	74
6.1 Die Vielfalt der Darstellungen	78
6.2 Das 'Lesen' von Darstellungen	80
6.3 Transfer zwischen verschiedenen Darstellungsformen	82
6.4 Entdecken von Eigenschaften	84
6.5 Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Erkennen von Funktionseigenschaften	85
7. Darstellen von Iterationen	87
7.1 Die Vielfalt der Darstellungen	87
7.2 Darstellungen als Computergraphiken	91
<b>IV. Testkonstruktion, Testfragen und Versuchsdurchführung</b>	93
1. Methode der empirischen Untersuchung	93
2. Ziele der empirischen Untersuchung	96
2.1 Arbeiten mit Funktionen	98
2.2 Arbeiten mit Darstellungen	99
2.3 Arbeiten mit dem Computer	99
3. Testkonstruktion	100
3.1 Testteilnehmer	100
3.2 Wahl der Iterationsfunktionen und -folgen	102
3.3 Wahl der Darstellungen	104
3.4 Die Computergraphiken	106
3.5 Das Computerprogramm	110
4. Testaufgaben	113
5. Versuchsdurchführung	127
5.1 Einführungsphase	128
5.2 Testphase	132
5.3 Zusatzaufgaben	133
5.4 Nachbesprechung	134

1. Antworten zur 1. Frage	135
1.1 Auswahl der Darstellungen	135
1.2 Verbale Beschreibungen der Darstellungsformen	136
1.2.1 Der Folgenanfang	137
1.2.2 Die Pfeilkette	139
1.2.3 Der Streckenzug	141
1.2.4 Die Tabelle	142
1.2.5 Das Pfeildiagramm	144
1.2.6 Der Graph	146
1.3 Zusammenfassung	147
2. Antworten zur 2. Frage	148
2.1 Auswahl der Darstellungen	148
2.2 Verbale Beschreibungen	148
2.2.1 Sichtweise der Folgen	149
2.2.2 Entdecken von Eigenschaften	150
2.3 Zusammenfassung	151
3. Antworten zur 3. Frage	152
3.1 Auswahl der Darstellungen	152
3.2 Analyse des Multiple-Choice-Tests	153
3.3 Abhängigkeit vom Startwert	154
3.4 Zusammenfassung	157
4. Antworten zur 4. Frage	158
4.1 Auswahl der Darstellungen	158
4.2 Argumentieren über Eigenschaften	159
4.3 Klassenspezifisches Verhalten	161
4.4 Zusammenfassung	162
5. Antworten zur 5. Frage	162
5.1 Verständnis und Sichtweise der Eigenschaften	163
5.2 Auswahl der Darstellungen	166
5.3 Arbeiten mit Darstellungen	166
5.4 Arbeiten mit Startwerten	168
5.5 Zusammenfassung	170
6. Antworten zur 6. Frage	170
6.1 Lösungen der Aufgabe	170
6.2 Zusammenfassung	171
7. Antworten zur 7. Frage	171
7.1 Klassifizierung der Antworten	172
7.1.1 Ergebnisse der Schülergruppe	172
7.1.2 Ergebnisse der Lehrergruppe	173
7.2 Strategien beim Arbeiten mit Darstellungen	173
7.2.1 Auswahl der Darstellungen	173
7.2.2 Arbeiten mit Darstellungen	176
7.2.3 Wechsel der Strategien	177

7.3 Arbeiten mit Startwerten	178
7.3.1 Wahl des 1. Startwertes	178
7.3.2 Suchstrategien der 'erfolgreichen' Teilnehmer	179
7.3.3 Arbeitsweisen der 'erfolglosen' Teilnehmer	185
7.4 Zusammenfassung	188
8. Antworten zur 8. Frage	189
8.1 Lösungen der Aufgabe	190
8.2 Auswahl der Darstellungen	190
8.3 Sichtweise des konstanten Verhaltens	191
8.4 Strategien beim Arbeiten mit Darstellungen	192
8.5 Zusammenfassung	193
9. Antworten zur 9. Frage	194
9.1 Lösungen der Aufgabe	194
9.2 Auswahl der Darstellungen	195
9.3 Strategien	195
9.4 Generieren und Überprüfen von Hypothesen	198
9.4.1 'Plötzliche Idee' mit Hilfe des Streckenzuges	198
9.4.2 'Plötzliche Idee' mit Hilfe der Stagnation	199
9.5 Zusammenfassung	201
10. Antworten zur 10. Frage	201
10.1 Auswahl der Darstellungen	202
10.2 Lösungen der Aufgabe	202
10.3 Auswirkungen von Computererfahrung und Geschlecht	204
10.4 Strategien der 'erfolgreichen' Teilnehmer	205
10.4.1 Finden eines Startwertes im Stagnationsbereich	205
10.4.2 Lösen der Gleichung	207
10.5 Zusammenfassung	210
<b>VI. Diskussion der Ergebnisse</b>	211
1. Der funktionale Aspekt der Iteration	211
2. Darstellen von Iterationen	214
3. Arbeiten mit dem Computer	216
4. Der Iterationsbegriff im Mathematiklehrgang	217
Literatur	220
Anhang A. Arbeitsblätter zur empirischen Untersuchung	236
Anhang B. Testfragen zu 'Bedeutung der Darstellungsformen'	249