

Inhaltsübersicht

Vorwort	5
Liste der mathematischen Zeichen	10
Formelübersicht	12
1. Der Begriff der Menge und seine Verwendung im Unterricht	21
1.1. Der Begriff der Menge	21
1.1.1. Definition des Begriffs Menge (21); 1.1.2. Beispiele von Mengen aus der Umwelt (21); 1.1.3. Mögliche Mißverständnisse (22); 1.1.4. Die Variationsbreite der Beispiele (22); 1.1.5. Die leere Menge (23); 1.1.6. Die Unterschiedenheit der Elemente (23); 1.1.7. Die Verschiedenheit von Mengen (24); 1.1.8. Die Elementbeziehung (24); 1.1.9. Mengen als Elemente einer Menge (24); 1.1.10.* Endliche und unendliche Mengen (25); Aufgaben 1.1. (25)	
1.2. Die Verwendung des Mengenbegriffs im Mathematikunterricht	26
1.2.1. Die Merkmalklötze (auch strukturiertes Material genannt) (26); 1.2.2. Kringelmengen, Plättchenmengen (27); 1.2.3. Kindermengen, Mengen von Gegenständen aus der Umwelt (27); 1.2.4. Zahlenmengen (28); 1.2.5. Teilmengen (28); 1.2.6. Vielfachmengen (28); 1.2.7. Geometrische Figuren als Mengen von Punkten der Ebene (29); 1.2.8. Die früher sog. geometrischen Örter (30); 1.2.9. Lösungsmengen von Gleichungen (30); 1.2.10. Lösungsmengen von Ungleichungen (31); 1.2.11. Mengen von Abbildungen (31); 1.2.12. Mengen von Figuren (32); 1.2.13. Stichprobenmengen (32); 1.2.14. Intervalle (33); Aufgaben 1.2. (34)	
1.3. Die beiden Verfahren zur Vorgabe einer Menge	35
1.3.1. Einleitung (35); 1.3.2. Das aufzählende Verfahren (35); 1.3.3. Der Begriff Grundmenge (36); 1.3.4. Das beschreibende Verfahren (36); 1.3.5. Die symbolische Form des beschreibenden Verfahrens (37); 1.3.6. Die Vorgabe von Mengen aus der Grundmenge der Merkmalklötze (38); Aufgaben 1.3. (39)	
1.4. Teilmengen	40
1.4.1. Definition der Teilmengenbeziehung (40); 1.4.2. Venndiagramme (40); 1.4.3. Teilmengen bei den Merkmalklötzen (41); 1.4.4. Auffassungsschwierigkeiten bei der Teilmengenbeziehung bei Mengen von Dingen (41); 1.4.5. Die Teilmengenbeziehung im ganzheitlichen Rechnen (42); 1.4.6. Die Teilmengenbeziehung bei Zahlenmengen (43); 1.4.7. Die Transitivität der Teilmengenbeziehung (43); 1.4.8. Teilmengenbeziehungen im „Haus der Vierecke“ (44); 1.4.9. Teilmengenbeziehung bei einer geometrischen Figur (44); 1.4.10. Echte und unechte Teilmengen einer Menge (44); Aufgaben 1.4. (45)	
1.5. Didaktische Hinweise (Warum Mengenbegriffe im Mathematikunterricht?)	45
1.5.1. Warum Mengenbegriffe im ersten Schuljahr? (45); 1.5.2. Mengenbegriffe fördern das Verständnis (46); 1.5.3. Mengenbegriffe vermitteln Überblicke (46); 1.5.4. Die Mengenbegriffe als Bestandteil einer mathematischen Fachsprache (46); 1.5.5. Mengenbegriffe als Grundlage für das Verständnis weiterer Begriffe (47); 1.5.6. Wie sollte man Mengenbegriffe nach dem 4. Schuljahr behandeln? (47)	

2. Menge und Zahl	48
2.1. Die Gleichmächtigkeit von Mengen	48
2.1.1. Paarweise Zuordnung der Elemente von Mengen (48); 2.1.2. Definition der paarweisen Zuordnung (48); 2.1.3. Die Definition der Gleichmächtigkeit von Mengen (49); 2.1.4. Das konkrete Herstellen einer paarweisen Zuordnung (49); 2.1.5. Natürlich gegebene paarweise Zuordnungen in der Umwelt (50); 2.1.6. Paarweise Zuordnung zwischen den Elementen einer Menge und einer Mengenmenge (51); 2.1.7.* Die Gleichmächtigkeit von \mathbb{N} zu \mathbb{Z} (52); 2.1.8.* \mathbb{N} gleichmächtig zu $\mathbb{Q}^{>0}$ (53); 2.1.9.* \mathbb{N} gleichmächtig zu \mathbb{Q} (53); 2.1.10.* \mathbb{N} nicht gleichmächtig zu \mathbb{R} (53); 2.1.11.* Die Gleichmächtigkeit von \mathbb{R} mit einem offenen Intervall $]a, b[$ (Abb. 54.1) (54); 2.1.12.* Die Gleichmächtigkeit als Äquivalenzrelation (55); 2.1.13.* Endlich und unendlich (56); 2.1.14.* Der Bernsteinsche Äquivalenzsatz (56); Aufgaben 2.1. (56)	
2.2. Die Definition der Zahlen	57
2.2.1. Die Definition der Farben als Hinführung zur Definition der Zahlen (57); 2.2.2. Die Definition der Kardinalzahl einer Menge (58); 2.2.3. Mengen mit den Kardinalzahlen 1 bis 4 (59); 2.2.4. Das Schichtenbild, Repräsentanten und Zahlen (59); 2.2.5. Symbole zur Bezeichnung der Kardinalzahl einer Menge (60); 2.2.6. Der Abstraktionsprozeß zur Zahl (60); 2.2.7. Die Zahlen als selbständige Individuen (61); 2.2.8. Die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen nichtleerer endlicher Mengen (61); 2.2.9. Die Zahl 0 (61); 2.2.10. Fehlerhafte und richtige Ausdrucksweisen (62); 2.2.11. Die traditionellen Ausdrücke Zahlbild und Mal (62); 2.2.12.* Die Kardinalzahlen unendlicher Mengen (63); 2.2.13.* Die mengentheoretische Definition des Kardinalzahlbegriffes (63); Aufgaben 2.2. (63)	
2.3. Die Kleinerbeziehung und die Größerbeziehung zwischen natürlichen Zahlen	64
2.3.1. Die Grundvorstellung, die zu diesen Beziehungen gehört (64); 2.3.2. Die Relationen . . . hat mehr Elemente als . . . und . . . hat weniger Elemente als . . . (65); 2.3.3. Zum Gebrauch der Wörter „mehr“ und „weniger“ (65); 2.3.4. Die Transitivität der Beziehungen . . . hat weniger Elemente als . . . und . . . hat mehr Elemente als . . . (66); 2.3.5. Verträglichkeiten mit der Gleichmächtigkeitsbeziehung (67); 2.3.6. Genau eine der drei Beziehungen gilt (69); 2.3.7. Die Definition von $a < b$ und $a > b$ für natürliche Zahlen (69); 2.3.8. Transitivität und Linearität von $a < b$ (70); 2.3.9. Weitere Sätze für $a > b$ (70); 2.3.10. Hinweise auf die Anwendung der Kleiner- und Größerbeziehung zwischen natürlichen Zahlen in der Wirklichkeit (71); Aufgaben 2.3. (72)	
2.4. Die Nachfolgerbeziehung bei Zahlen	73
2.4.1. Die Relationen . . . hat ein Element mehr als . . . , . . . hat ein Element weniger als . . . (73); 2.4.2. Verträglichkeiten mit der Gleichmächtigkeitsrelation (74); 2.4.3. Nachfolger und Vorgänger bei natürlichen Zahlen (75); 2.4.4. Spiele zur Nachfolgerbildung nach Grew und Dienes (77); 2.4.5. Ein weiteres Spiel zur Nachfolgerbildung (78); Aufgaben 2.4. (78)	
2.5. Didaktische Überlegungen zum ersten Schuljahr	79
2.5.1. Eine grundsätzliche Bemerkung zur Einführung der Zahlen, Zahlbeziehungen und Zahlverknüpfungen (79); 2.5.2. Zur Einführung der Zahlen (80); 2.5.3. Zur Ein-	

führung der Kleiner- und Größerbeziehung zwischen Zahlen (80); 2.5.4. Pränumerischer und numerischer Kurs im ersten Schuljahr (81); 2.5.5. Das Prinzip der Variation (81)

3. Namen von Gegenständen, Mengen und Zahlen	82
3.1. Die Unterscheidung Name, Bild, Gegenstand	82
3.1.1. Beispiele (82); 3.1.2. Eigenschaften von Gegenständen, Namen und Bildern (82); 3.1.3. Zum Gebrauch des Gleichheitszeichens (82); 3.1.4. Namen von Zahlen (83); 3.1.5. Namen von Mengen (83); 3.1.6. Gleichheitszeichen zwischen Bildern (84); Aufgaben 3.1. (84)	
3.2. Die verschiedenen Positionssysteme zur Bezeichnung der Zahlen	85
3.2.1. Verschiedene Arten von Zahlwörtern (85); 3.2.2. Die Alphabete verschiedener Positionssysteme und ihre Zahlwörter (86); 3.2.3. Das sogenannte verbale Zählen (86); 3.2.4. Die Gesetzmäßigkeiten der Nachfolgebildung bei Zahlwörtern (87); 3.2.5. Warum begreifen viele Menschen die verschiedenen Positionssysteme nicht? (88); Aufgaben 3.2. (88)	
3.3. Die Zuordnung des Zahlnamens zur Zahl	89
3.3.1. Problemstellung (89); 3.3.2. Das Bilden des Nachfolgers bei Zahlen und Zahlen- namen (89); 3.3.3. Das quantifizierende Zählen mit Grundzahlwörtern (90); 3.3.4. Das Bündelungsverfahren (91); 3.3.5. Die Begründung des Bündelungsverfahrens (93); 3.3.6. Spiele zum Bündelungsverfahren nach Z. P. Dienes (94); 3.3.7. Das Zählen mit den Ordnungszahlwörtern (95); 3.3.8. Die Namengebung der Zahlen im ganzheitlichen Rechenunterricht (95); 3.3.9. Die Bestimmung der Zahleigenschaft für Mengen mit mehr als 10 Elementen im ganzheitlichen Rechenunterricht (96); 3.3.10. Die Übersetzung eines Zahlwortes in ein anderes Ziffernsystem (96); 3.3.11. Die Übersetzung eines Zahlwortes in das Zehnersystem (98); 3.3.12. Die Übersetzung eines Zahlwortes des Dezimalsystems in ein anderes System (98); 3.3.13. Die Wortendung „-mal“ bei der Bezeichnung der Kardinalzahl einer Menge von Vorgängen (100); Aufgaben 3.3. (100)	
3.4. Zur Didaktik der Behandlung der Stellenwertsysteme im Unterricht	101
3.4.1. Die Bedeutung des Zehnersystems (101); 3.4.2. Warum werden auch andere Positionssysteme unterrichtet? (101); 3.4.3. Die Auffassung von Z. P. Dienes (102); 3.4.4. Die Situation in der Bundesrepublik im Jahre 1970 (102); 3.4.5. Die Unterscheid- ung Gegenstand, Name, Bild (103); 3.4.6. Die Einführung der Positionssysteme, falls man das Zehnersystem schon kennt (103); 3.4.7. Die Einführung der Positionssysteme, falls man das Zehnersystem noch nicht kennt (104); 3.4.8. Weitere Hilfen bei der Ein- führung der Positionssysteme (105); 3.4.9. Zählen und Zahlbegriffsbildung (107); Aufgaben 3.4. (108)	
4. Durchschnitt, Vereinigung, Komplement, Restmenge	110
4.1. Der Durchschnitt von Mengen	110
4.1.1. Ein einführendes Beispiel (110); 4.1.2. Ein zweites Beispiel (110); 4.1.3. Venn- diagramme (111); 4.1.4. Definition des Durchschnitts (111); 4.1.5. Weitere Beispiele	

(111); 4.1.6. Das logische „und“ (112); 4.1.7. Das Straßenkreuzungsspiel (Abb. 112.1) (112); 4.1.8. Karnaughdiagramm (113); 4.1.9. Torspiele (113); 4.1.10. Menge gemeinsamer Teiler (114); 4.1.11. Menge gemeinsamer Vielfacher (114); 4.1.12. Der Durchschnitt in der Geometrie (114); 4.1.13. Durchschnitte von Figurenmengen (115); 4.1.14. Elementfremde oder disjunkte Mengen (115); 4.1.15. Durchschnitt bei Teilmengen (115); 4.1.16. Der Durchschnitt von drei und mehr Mengen (115); 4.1.17. Schnittmengen in Gleichungen mit Mengenbildern (116); Aufgaben 4.1. (116)	
4.2. Die Vereinigungsmenge	117
4.2.1. Venndiagramm (117); 4.2.2. Definition der Vereinigungsmenge (118); 4.2.3. Beispiele zur Vereinigung von Mengen (118); 4.2.4. Das logische „oder“ (118); 4.2.5. Das Straßenkreuzungsspiel (Abb. 119.2) (119); 4.2.6. Karnaughdiagramm (Abb. 119.3) (119); 4.2.7. Torspiel (119); 4.2.8. Tätigkeiten, Vorgänge und Sachverhalte, die zur Vereinigungsmenge führen (120); 4.2.9. Die Analyse der Beispiele (120); 4.2.10. Die Vereinigung von mehr als zwei Mengen (121); 4.2.11. Die Vereinigungsmenge in einer Gleichung mit Mengenbildern (122); Aufgaben 4.2. (122)	
4.3. Das Komplement einer Menge	123
4.3.1. Venndiagramm (Abb. 123.1) (123); 4.3.2. Definition des Komplements einer Menge (123); 4.3.3. Straßenkreuzungsspiel und Karnaughdiagramm (124); 4.3.4. Torspiel (124); Aufgaben 4.3. (125)	
4.4. Die Restmenge (mengentheoretische Differenz)	125
4.4.1. Venndiagramm (Abb. 125.1) (125); 4.4.2. Definition der Restmenge (125); 4.4.3. Straßenkreuzungsspiel und Karnaughdiagramm (Abb. 126.1 und 126.2) (126); 4.4.4. Torspiel (126); 4.4.5. Tätigkeiten, Vorgänge und Sachverhalte, die auf die Restmenge führen (126); 4.4.6. Analyse der Beispiele (127); 4.4.7. Die Restmenge in einer Gleichung mit Mengenbildern (127); Aufgaben 4.4. (127)	
4.5. Zur Didaktik der logischen Schulung in der Grundschule	128
4.5.1. Gründe für die Einführung von Durchschnitt, Vereinigung, Komplement und Restmenge (128); 4.5.2. Die Merkmalklötze, Schulung der Kombinationsfähigkeit (129); 4.5.3. Spiele zur Schulung des „nicht“ (\neg) (130); 4.5.4. Spiele zur Schulung des „und“ (\wedge) (131); 4.5.5. Spiele zur Schulung des „oder“ (\vee) (131); 4.5.6. Regelspiele nach H. Freund (132); 4.5.7. Verzicht auf logische Schulung? (132); 4.5.8. Warum kann man mit den Kringelmengen des ganzheitlichen Unterrichts keine logische Schulung betreiben? (132); Aufgaben 4.5. (133)	
4.6. Mengenalgebra	134
4.6.1. Die de Morganschen Regeln (134); 4.6.2. Die Bedeutung der de Morganschen Regeln für die Logik (134); 4.6.3. Die Distributivgesetze (134); 4.6.4. Beweis von Formeln durch Mitgliedstabellen (135); 4.6.5. Empirischer Nachweis der Distributivgesetze durch Torspiele (137); 4.6.6. Empirischer Nachweis der de Morganschen Regeln durch Torspiele (138); 4.6.7. Weitere Formeln (138); 4.6.8. Mengenalgebra (139); 4.6.9. Beziehungen zwischen Mengenalgebra und Logik (139); 4.6.10. Die Ungültigkeit gewisser Formeln (140); Aufgaben 4.6. (140)	

5. Addition und Subtraktion	142
5.1. Die Addition	142
5.1.1. Die bisherige Situation (142); 5.1.2. Die mit der Addition verknüpfte Grundvorstellung (142); 5.1.3. Ein wichtiger Satz für disjunkte Mengen (142); 5.1.4. Die Definition der Addition zweier Zahlen (143); 5.1.5. Die Unabhängigkeit der Definition 1 von der Wahl der Repräsentanten (144); 5.1.6. Die Formulierung der Beziehung der Addition zur Realität (144); 5.1.7. Reine Zahlenaufgaben zur Addition; Standardnamen von Zahlen (145); 5.1.8. Anwendungen der Addition (145); 5.1.9. Bemerkungen zum Fortschritt der Didaktik der Mathematik (146); 5.1.10. Nachfolgebildung und Addition von 1 (147); 5.1.11. Addition mehrerer Summanden (147); 5.1.12. Wo steckt der Fehler? (148); 5.1.13. Situationsskizzen zur Addition (148); 5.1.14. * Addition bei unendlichen Kardinalzahlen (149); Aufgaben 5.1. (149)	
5.2. Die Subtraktion natürlicher Zahlen	150
5.2.1. Die Grundvorstellung der Subtraktion (150); 5.2.2. Ein wichtiger Satz für endliche Mengen (151); 5.2.3. Die Definition der Subtraktion (152); 5.2.4. Die Anwendung der Subtraktion (153); 5.2.5. Bemerkungen zum Fortschritt in der Didaktik der Mathematik (153); 5.2.6. Einige schwierigere Anwendungen der Subtraktion (154); 5.2.7. Reine Zahlenaufgaben zur Subtraktion (155); 5.2.8. * Warum kann man keine Subtraktion für unendliche Kardinalzahlen definieren? (155); Aufgaben 5.2. (156)	
5.3. Eigenschaften der Addition und Subtraktion	157
5.3.1. Die bisherige Situation unserer Überlegungen (157); 5.3.2. Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion (157); 5.3.3. Der Beweis der Sätze (158); 5.3.4. Das Kommutativgesetz der Addition (159); 5.3.5. Tauschaufgaben bei der Subtraktion (160); 5.3.6. Das gegenläufige Verändern von Summanden (161); 5.3.7. Das Zurückführen auf eine Nachbaraufgabe. Das Assoziativgesetz (162); 5.3.8. Das gleichsinnige Verändern der Glieder einer Differenz (163); 5.3.9. Zurückführen einer Subtraktionsaufgabe auf eine Nachbaraufgabe (164); 5.3.10. Subtraktion mehrerer Glieder (165); 5.3.11. Monotoniegesetz (166); 5.3.12. Monotoniegesetz der Subtraktion (167); 5.3.13. Die Addition führt zu größeren Zahlen (168); 5.3.14. Zusammenhang zwischen Addition und der Kleinerbeziehung (168); 5.3.15. Rückblick auf die Beweise dieses Kapitels 5.3. (169); Aufgaben 5.3. (170)	
5.4. Strukturelle Betrachtungen zur Nachfolgerbeziehung	171
5.4.1. Nachfolger und Addition der Zahl 1 (171); 5.4.2. Die wiederholte Nachfolgebildung (171); 5.4.3. Addition und wiederholte Nachfolgebildung (171); 5.4.4. Nachfolger von Zahlen und Zahlwörtern (172); 5.4.5. Die Bedeutung der Isomorphie zwischen Zahlen und Zahlwörtern für das Rechnen (173); 5.4.6. Weitere Mengen mit Nachfolgerrelation, welche den Zahlen isomorph sind (174); 5.4.7. Die Bedeutung der Beispiele (176); 5.4.8. Die Peanoaxiome (177); 5.4.9. Die Subtraktion als Vorgängerbildung (177); Aufgaben 5.4. (177)	
5.5. Zur Didaktik der Zahlverknüpfungen	179
5.5.1. Eine grundsätzliche Entscheidung (179); 5.5.2. Was heißt Zahlbegriff? (180); 5.5.3. Soll man die Beziehungen zwischen den Zahlen sofort im Unterricht mitbehandeln? (180); 5.5.4. Was ist Rechnen? (181); 5.5.5. Arten des Rechnens (181); 5.5.6. Ist	

Rechnen überflüssig geworden? (182); 5.5.7. Der eiserne Grundbestand an Aufgaben, deren Lösungen spontan angegeben werden können. (183); 5.5.8. Zurückführen auf andere Aufgaben (183); 5.5.9. Das didaktische Problem der Terme (184); 5.5.10. Wie liest man $+$, $-$ und $=$? (184); 5.5.11. Über die Begriffe „Hinzufügen“, „Zerlegen“, „Ergänzen“ (184); Aufgaben 5.5. (185)

6. Multiplikation und Division	186
6.1. Multiplikation	186
6.1.1. Beispiele zur Hinführung auf die Grundvorstellung, die zur Multiplikation gehört (186); 6.1.2. Mengen gleichmächtiger Mengen (187); 6.1.3. Definition der Multiplikation von Zahlen (187); 6.1.4. Zusammenhang mit der Addition (188); 6.1.5. Anwendungen der Multiplikation (189); 6.1.6. Eine weitere Analyse der Beispiele von 6.1.1. (190); 6.1.7.* Berechnungen bei unendlichen Mengen (190); Aufgaben 6.1. (192)	
6.2. Eigenschaften der Multiplikation im Bereich der natürlichen Zahlen	193
6.2.1. Das Kommutativgesetz $a \cdot b = b \cdot a$ (193); 6.2.2. $(2a) \cdot b = 2(a \cdot b)$ (194); 6.2.3. Das Assoziativgesetz der Multiplikation (195); 6.2.4. Das Distributivgesetz (196); 6.2.5. Ein Distributivgesetz bezüglich der Subtraktion (197); 6.2.6. Weitere Distributivgesetze (197); 6.2.7. Null als Faktor in einem Produkt (198); 6.2.8. 1 als neutrales Element der Multiplikation (198); 6.2.9. Die didaktische Bedeutung der Überlegungen dieses Abschnittes 6.2. (198); 6.2.10. Rechnen im Bereich der Multiplikation (199); 6.2.11. Das Einmaleins eines Positionssystems (200); 6.2.12. Die Beziehung der Multiplikation zur Nachfolgebildung (201); Aufgaben 6.2. (202)	
6.3. Multiplikation und Cartesisches Produkt	203
6.3.1. Einführendes Beispiel (203); 6.3.2. Definition des Cartesischen Produktes zweier Mengen (203); 6.3.3. Weitere Beispiele zum Cartesischen Produkt (204); 6.3.4. Zusammenhang zwischen dem Cartesischen Produkt und der Multiplikation (205); 6.3.5. Die Bedeutung von Satz 9 (206); 6.3.6. Einführung der Multiplikation mit Hilfe des Cartesischen Produktes in der Schule? (206); 6.3.7. Einfache Beispiele zum Cartesischen Produkt für die Grundschule (207); 6.3.8.* Der Beweis des Kommutativgesetzes der Multiplikation (208); 6.3.9.* Der Beweis des Assoziativgesetzes $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (208); 6.3.10.* Der Beweis des Distributivgesetzes $a(b + c) = ab + ac$ (209); 6.3.11. Ein für den Unterricht geeigneter Beweis des Distributivgesetzes (209); 6.3.12.* Der Beweis des Distributivgesetzes $a(b - c) = ab - ac$ (210); 6.3.13. Schlußbemerkung (210); Aufgaben 6.3. (210)	
6.4. Aufteilen (Einteilen)	212
6.4.1. Was ist Aufteilen? (212); 6.4.2. Aufbauen einer Menge aus gleichmächtigen Mengen (Enthaltensein) (213); 6.4.3. Die Zerlegungsrelation (213); 6.4.4. Die Anzahl der Teilmengen einer Aufteilerlegung (214); 6.4.5. Zusammenhang mit der Multiplikation (214); 6.4.6. Zusammenhang mit Addition und Subtraktion (214); 6.4.7. „Aufteilen“ oder „Einteilen“? (215); Aufgaben 6.4. (215)	
6.5. Verteilen (Teilen)	216
6.5.1. Verteilen als Tätigkeit mit Mengen (216); 6.5.2. Die dem Verteilen zugrunde liegende mathematische Relation (217); 6.5.3. Zusammenhang mit der Multiplikation (217); Aufgaben 6.5. (218)	

6.6. Division	218
6.6.1. Die Gleichungen $a \cdot \square = b$ und $\square \cdot a = b$ (218); 6.6.2. Die Problematik des Divisionszeichens (219); 6.6.3. Die mit der Division verbundenen Vorstellungen (220); 6.6.4. Eigene Zeichen für Aufteilen und Verteilen? (220); 6.6.5. Was ist Rechnen im Bereich der Division? (221); 6.6.6. Der Beweis der Gesetze zur Division (221); Aufgaben 6.6. (222)	
7. Relationen	224
7.1. Die Beschreibung einer Relation durch einen sprachlichen Ausdruck (eine Aussageform)	224
7.1.1. Die bisherige Situation (224); 7.1.2. Zusammenstellung der bisherigen zwei-stelligen Relationen (224); 7.1.3. Bisher vorgekommene dreistellige Relationen (224); 7.1.4. Bisher vorgekommene vierstellige Relationen (225); 7.1.5. Analyse der Beispiele (225); 7.1.6. Variable (226); 7.1.7. Grundmengen für die Variablen (227); 7.1.8. Aus-sagen und Aussageformen (228); 7.1.9. Terme (229); 7.1.10. Gleichungen, Unglei-chungen (230); 7.1.11. Beschreibung einer Relation durch Aussageformen; Relations-vorschriften (230); 7.1.12. Aussageformen mit einer Variablen (231); 7.1.13. Erfüllungsmengen (Lösungsmengen) von Aussageformen (232); 7.1.14. Die Bedeutung der Rela-tionen (232); Aufgaben 7.1. (233)	
7.2. Pfeildiagramm (Pfeilzeichnung), Tabellenschema, Graph	234
7.2.1. Beispiele aus dem ersten Schuljahr (234); 7.2.2. Weitere Beispiele (235); 7.2.3. Was sind Pfeildiagramme? (236); 7.2.4. Das Tabellenschema (237); 7.2.5. Der Graph einer Relation (238); Aufgaben 7.2. (239)	
7.3. Äquivalenzrelationen	241
7.3.1. Überblick über die folgenden Abschnitte (241); 7.3.2. Die Transitivität (241); 7.3.3. Die Symmetrie (242); 7.3.4. Die Reflexivität (243); 7.3.5. Äquivalenzrelationen (244); 7.3.6. Klasseneinteilungen oder Zerlegungen (245); 7.3.7. Die Definition durch Abstraktion (247); Aufgaben 7.3. (247)	
7.4. Strenge, lineare und identitive Ordnungsrelationen	249
7.4.1. Einführende Beispiele (249); 7.4.2. Strenge Ordnungen (249); 7.4.3. Lineare Ordnungen (250); 7.4.4. Identitive Ordnungsrelationen (251); 7.4.5. Hassediagramme (253); 7.4.6. Anwendungen der Hassediagramme im Unterricht (254); 7.4.7. Beispiele für die lexikographischen Ordnungen (257); 7.4.8. Baumdiagramm zur lexikographi-schen Ordnung (259); 7.4.9. Die Definition der lexikographischen Ordnung (260); 7.4.10. Die didaktische Bedeutung der lexikographischen Ordnung (261); 7.4.11. Die Übertragung der Ordnungsrelation von der Menge der natürlichen Zahlen auf eine andere Menge (262); 7.4.12. Die ordinale Verwendung der natürlichen Zahlen, Numere-rinen (262); Aufgaben 7.4. (263)	
7.5. Operatoren, Funktionen, Abbildungen	264
7.5.1. Drei Wörter mit derselben Bedeutung (264); 7.5.2. Beispiele (264); 7.5.3. Die Definition des Begriffs Operator (Funktion, Abbildung) (265); 7.5.4. Maschinen zur Konkretisierung von Operatoren (266); 7.5.5. Zustand-Operator-Zustand-Spiele (267); 7.5.6. Der didaktische Wert der Maschinenspiele (268); 7.5.7. Operatoren (Funktionen)	

als rechtseindeutige Relationen (268); 7.5.8. Das Tabellenschema eines Operators (269); 7.5.9. Der Graph einer Funktion (270); 7.5.10. Neue Schreibweise bei Funktionen, die einen Graphen haben (270); 7.5.11. Geometrische Abbildungen (270); Aufgaben 7.5. (271)	
7.6. Verknüpfungen	272
7.6.1. Beispiele (270); 7.6.2. Die Definition der Verknüpfung (273); 7.6.3. Zu Verknüpfungen passende Maschinen (274); 7.6.4. Die Verwendung der Maschinen zur Verdeutlichung einiger Gesetze (275); 7.6.5. Verknüpfungen als Relationen (276); 7.6.6. Verknüpfungstafeln (276); 7.6.7. Die Hintereinanderschaltung von Deackabbildungen einer Figur (277); Aufgaben 7.6. (278)	
7.7. Die Definition des Begriffs der Relation	279
7.7.1. Hinführung zur Definition (279); 7.7.2. Vom Tabellenschema zur Definition (280); 7.7.3. Die Eigenschaften der Relationen in neuer Formulierung (281); 7.7.4. Die Komplementärrelation (281); 7.7.5. Die Kehrrelation einer Relation (282); 7.7.6. Umkehrung von Funktionen (283); 7.7.7. Die Definition einer dreistelligen Relation (285); Aufgaben 7.7. (285)	
8. Einige Begriffe und Probleme aus der Topologie	287
8.1. Was ist Topologie?	287
8.1.1. Hinführung zur Erklärung (287); 8.1.2. Die Definition von „topologisch“ (287); 8.1.3. Topologische Begriffe werden vom Kinde eher gebildet (290); 8.1.4. Warum topologische Begriffe zu Beginn des ersten Schuljahres? (290); Aufgaben 8.1. (291)	
8.2. Topologische Probleme	292
8.2.1. Das Vierfarbenproblem (292); 8.2.2. Was sind topologische Probleme? (292); 8.2.3. Abwandlungen des Vierfarbenproblems (292); 8.2.4. Verformung von Buchstaben (293); 8.2.5. Brückenprobleme (293); Aufgaben 8.2. (294)	
9. Eine didaktische Schlußbemerkung	296
9.1. Zur Einordnung des Buches in die Didaktik der Mathematik	296
9.2. Neue schulpädagogische Methoden	296
9.3. Ein Plan für das erste Schuljahr	297
9.4. Rechenfertigkeit und Rechenfähigkeit	299
9.5. Verinnerlichte Handlungen und Operationen und ihre Bedeutung für die Didaktik der Mathematik	300
Anhang*	
1.* Endliche und unendliche Mengen	301
2.* Die Eigenschaften der Nachfolgerbeziehung für Kardinalzahlen nichtleerer endlicher Mengen	302
3.* Die Peanoaxiome	304
4.* Der Bernsteinsche Äquivalenzsatz	305
5.* Die logischen Junktoren	306
Register	307