

Inhaltsübersicht

Vorwort	5
1. Größen	13
1.1. Übersicht über die wichtigsten Größenarten	13
1.1.1. Welche Größenarten kommen in der Grundschule vor? (13); 1.1.2. Physik oder Mathematik (13); 1.1.3. Größen und ihre Repräsentanten (13); 1.1.4. Äquivalenzrelationen zwischen den Repräsentanten der Größen (14); 1.1.5. Die Ordnungsrelation zwischen den Repräsentanten der Größen (14); 1.1.6. Die Analogie zu den Mengen und ihren Zahleigenschaften (15); 1.1.7. Zur Gliederung der folgenden Abschnitte (15); 1.1.8. Fehler in der traditionellen Didaktik der Mathematik (16); 1.1.9. Die Verteilung der einzelnen Größen auf die Schuljahre (16); Aufgaben 1.1. (16)	
1.2. Längen	17
1.2.1. Vergleich und Klasseneinteilung von Strecken, Stäben und Kanten (17); 1.2.2. Verallgemeinerung auf Streckenzüge (17); 1.2.3. Verallgemeinerung auf beliebige Kurven (18); 1.2.4. Die Eigenschaften der Relationen „ist so lang wie“ und „kürzer als“ (18); 1.2.5. Die Definition des Begriffs der Länge einer Kurve und der Kleinerrelation zwischen Längen (19); 1.2.6. Die Einführung von Einheiten (20); 1.2.7. Die Einführung der Einheiten im Unterricht (21); 1.2.8. Die Angabe einer Länge durch Maßzahl und Einheit (21); 1.2.9. Das Ausmessen einer Strecke mit dem Lineal (22); 1.2.10. Haben alle Längen einen eigenen Namen (22); 1.2.11. Die Verwendung von Längen zur Festlegung zu Punkten (22); 1.2.12. Die Multiplikation einer Länge mit einer Zahl (23); 1.2.13. Die Addition von Längen (24); 1.2.14. Die Subtraktion von Längen (26); 1.2.15. Zwei Divisionen (26); Aufgaben 1.2. (28)	
1.3. Flächeninhalte; Größe von Flächen	29
1.3.1. Vielecke (29); 1.3.2. Die stückweise Deckungsgleichheit und die Relation „hat mehr Fläche als“ (30); 1.3.3. Eigenschaften der Relationen „stückweise deckungsgleich“ und „hat mehr Fläche als“ (30); 1.3.4. Die Definition des Flächeninhaltes und der Kleinerrelation zwischen Flächeninhalten (32); 1.3.5. Die Einführung der Einheiten (33); 1.3.6. Die Beschreibung eines Flächeninhaltes durch Maßzahl und Einheit (34); 1.3.7. Verwandlung von Einheiten (35); 1.3.8. Die Multiplikation eines Flächeninhaltes mit einer natürlichen Zahl (35); 1.3.9. Addition von Flächeninhalten (36); 1.3.10. Subtraktion von Flächeninhalten (36); 1.3.11. Division (37); 1.3.12. Die Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechtecks aus den Seitenlängen (38); 1.3.13. Definition eines neuen Produktes zwischen Längen (38); Aufgaben 1.3. (41)	
1.4. Volumina	42
1.4.1. Vergleich und Klasseneinteilung von Körpern (42); 1.4.2. Warum ist ein Volumenvergleich von Körpern mit Hilfe der stückweisen Deckungsgleichheit nicht in	

allen Fällen möglich? (43); 1.4.3. Definition des Volumens eines Körpers und der Kleinerbeziehung zwischen Volumina (43); 1.4.4. Die Einführung der Einheiten (44); 1.4.5. Verknüpfungen bei Volumina (45); 1.4.6. Berechnungen am Quader (46); 1.4.7. Ein neues Produkt zwischen Flächeninhalten und Längen (46); Aufgaben 1.4. (48)	
1.5. Gewichte (Massen)	48
1.5.1. Vergleich von Körpern mit der Waage (48); 1.5.2. Definition des Gewichtes eines Körpers und der Kleinerrelation zwischen Gewichten (48); 1.5.3. Einführung von Einheiten (49); 1.5.4. Verknüpfungen bei Gewichten (50); Aufgaben 1.5. (50)	
1.6. Zeitspannen, Dauer eines Vorgangs	51
1.6.1. Vergleich von Vorgängen hinsichtlich ihrer Dauer (51); 1.6.2. Die Dauer eines Vorgangs (51); 1.6.3. Zeitpunkte, Uhrzeiten (51); 1.6.4. Zeiteinheiten (52); 1.6.5. Verknüpfungen bei Zeitspannen (52); 1.6.6. Einige ergänzende didaktische Bemerkungen (53); Aufgaben 1.6. (53)	
1.7. Geldwerte	53
1.7.1. Die Gleichwertigkeit von Geldstückmengen (53); 1.7.2. Der Wert einer Menge von Geldstücken oder -scheinen (53); 1.7.3. Einheiten von Geldwerten (54); 1.7.4. Verknüpfungen bei Geldwerten (54); Aufgaben 1.7. (55)	
1.8. Strukturelle Betrachtungen zu den Größen	55
1.8.1. Die Eigenschaften der Addition und der Kleinerrelation bei den bisherigen Größen (55); 1.8.2. Definition des Begriffs Größenbereich (56); 1.8.3. Die Definition eines Produktes zwischen einer natürlichen Zahl und einer Größe (57); 1.8.4. Größenbereiche mit Teilbarkeitseigenschaft (57); 1.8.5. Folgerungen für beliebige Größenbereiche (58); 1.8.6.* Repräsentantensysteme von G.ößenbereichen (59); 1.8.7.* Zusammenhang mit der Definition eines Größenbereiches (62); 1.8.8.* Beweis der Folgerungen für Größenbereiche mit Hilfe der Repräsentanten (63); 1.8.9.* Subtraktion (65); 1.8.10. Division in Größenbereichen mit Teilbarkeitseigenschaft (65); Aufgaben 1.8. (66)	
1.9. Zur Didaktik der Größenbereiche	67
1.9.1. Ein Rückblick (67); 1.9.2. Warum sind Repräsentantenbereiche für die Didaktik der Mathematik wichtig? (67); 1.9.3. Die Begriffsbildung der einzelnen Größen (68); 1.9.4. Die Einführung der Einheiten (68); 1.9.5. Die Bezeichnung einer Größe durch Maßzahl und Einheit (69); Verwandlungsaufgaben (69); 1.9.7. Eine genaue Begründung des Rechnens mit Größen (70); 1.9.8. Die Begründung der Rechenregeln (71); 1.9.9. Sachaufgaben, Rechenfähigkeit, Situationsskizzen (72); 1.9.10. Gibt es noch weitere Größen? (74)	
2. Abschließende und zusammenfassende Betrachtungen zu den natürlichen Zahlen	75
2.1. Die natürlichen Zahlen als Vielfache von Größen	75
2.1.1. Vorbemerkungen (75); 2.1.2. Vielfache von Größen (75); 2.1.3. Die Einführung der natürlichen Zahlen als Vielfache einer Größe (76); 2.1.4. Kann man auch im ersten	

Schuljahr die natürlichen Zahlen als Vielfache einer Größe einführen? (77); 2.1.5. Die didaktische Verwendung der Isomorphie zwischen den Vielfachen einer Größe und den natürlichen Zahlen (78); Aufgaben 2.1. (80)

2.2. Die natürlichen Zahlen als Operatoren 81

2.2.1. Multiplikationsoperatoren auf Größenbereichen (81); 2.2.2. Isomorphie zwischen den natürlichen Zahlen und den Multiplikationsoperatoren (81); 2.2.3. Die Definition der natürlichen Zahlen als Operatoren (82)

2.3. Zur strukturellen Kennzeichnung der natürlichen Zahlen 82

2.3.1. Verschiedene Möglichkeiten der Definition der natürlichen Zahlen (82); Zur Einführung der natürlichen Zahlen als Zahleigenschaften von Mengen (83); 2.3.3. Die Abstraktion zur Struktur (83); 2.3.4. Die verschiedenen Verwendungsarten der natürlichen Zahlen (85)

2.4. Anmerkungen zur sog. operativen Begründung der natürlichen Zahlen 86

2.4.1. Zur Abgrenzung gegenüber Kursen, die sich an sog. operativen Lernprinzipien orientieren (86); 2.4.2. Einige Grundgedanken der Theorie von Lorenzen (86); 2.4.3. Didaktische Probleme (87)

3. Bruchzahlen 89

3.1. Multiplikations- und Divisionsoperatoren 89

3.1.1. Multiplikationsoperatoren (89); 3.1.2. Die Verkettung von Multiplikationsoperatoren (90); 3.1.3. Divisionsoperatoren (92); 3.1.4. Ist jeder Größe eine Bildgröße zugeordnet? (93); 3.1.5. Divisionsoperatoren auf \mathbb{N} (94); 3.1.6. Divisionsoperatoren auf dem Größenbereich der Geldwerte (94); 3.1.7. Verkettung von Divisionsoperatoren (94); 3.1.8. Der identische Operator (96); 3.1.9. Zueinander inverse Operatoren (96); Aufgaben 3.1. (97)

3.2. Bruchoperatoren 98

3.2.1. Verkettung von Multiplikations- und Divisionsoperatoren (98); 3.2.2. Die Vertauschbarkeit von Multiplikations- und Divisionsoperatoren (99); 3.2.3. Die Assoziativität des Verkettens bei beliebigen Operatoren (101); 3.2.4. Grundvorstellung und Schichtenbild (102); 3.2.5. Die Relation X ist m tel von Y zwischen Repräsentanten von Größen (103); 3.2.6. Der Gegenoperator eines Bruchoperators (104); 3.2.7. Die Gleichheit von Bruchoperatoren, Erweitern und Kürzen (105); 3.2.8. Die Ordnungsrelation für Bruchoperatoren (108); 3.2.9. Bruchoperatoren als Maßzahlen von Größen (111); 3.2.10. Die gemischte Bruchschreibweise im Zusammenhang mit Größen (112); 3.2.11. Der Zahlenstrahl (die Zahlenhalbgerade) (113); 3.2.12. Verwendung von Bruchoperatoren in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (114); Aufgaben 3.2. (117)

3.3. Die Verkettung von Bruchoperatoren 119

3.3.1. Einführendes Beispiel (119); 3.3.2. Die Regel über die Verkettung von Bruchoperatoren (119); 3.3.3. Vor dem Ausmultiplizieren ist zu kürzen (120); 3.3.4. Die

Grundvorstellung, die mit der Verkettung zu verbinden ist (121); 3.3.5. Einteilung der Sachaufgaben zur Verkettung von Bruchoperatoren (121); 3.3.6. Operator-Operator-Aufgaben (122); 3.3.7. Zustand-Operator-Aufgaben (122); 3.3.8. Umkehrung der Operator-Operator-Aufgaben (123); 3.3.9. Erste Umkehrung der Zustand-Operator-Aufgaben (124); 3.3.10. Zweite Umkehrung der Zustand-Operator-Aufgaben (125); 3.3.11. Die Umkehrung der Verkettung von Bruchoperatoren, Division (126); 3.3.12. Verkettung von Bruchoperatoren in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (127); Aufgaben 3.3. (128)	
3.4. Addition und Subtraktion von Bruchoperatoren	129
3.4.1. Die Addition von Größen mit Bruchoperatoren als Maßzahlen (129); 3.4.2. Das Weglassen der Einheitsgröße bei den Rechnungen (130); 3.4.3. Die Definition der Addition von Bruchoperatoren (130); 3.4.3. Rechengesetze über die Addition von Bruchoperatoren (132); 3.4.5*. Das Distributivgesetz (133); 3.4.6. Die Subtraktion von Größen mit Bruchoperatoren als Maßzahlen (134); 3.4.7. Die Subtraktion von Bruchoperatoren (134); 3.4.8. Die gemischte Bruchschreibweise (136); 3.4.9. Sachaufgaben zur Addition und Subtraktion (137); 3.4.10. Addition von Bruchoperatoren in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (138); Aufgaben 3.4. (139)	
3.5. Die Bruchzahlen	139
3.5.1. Abkürzende Schreibweisen und ihr Hintergrund (139); 3.5.2. Die Einbettung der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchoperatoren (140); 3.5.3. Wann sollte die Abstraktion zur Struktur erfolgen? (141); 3.5.4. Die Charakterisierung der Struktur der Bruchzahlen (141); 3.5.5. Die Definition der Bruchzahlen (142); 3.5.6. Andere Modelle der Struktur der Bruchzahlen (143); 3.5.7*. Ein weiteres Modell der Struktur der Bruchzahlen (144); 3.5.8. Die Menge der Bruchzahlen als Größenbereich (145); Aufgaben 3.5. (145)	
3.6. Zur Didaktik der Bruchrechnung	145
3.6.1. Das Ziel dieses Abschnittes (145); 3.6.2. Gründe für die Einführung der Bruchzahlen als Operatoren (145); 3.6.3. Was heißt: Ein Verknüpfungsgebilde operiert auf einer Menge? (147); 3.6.4. Die elementaren Anwendungen der Bruchzahlen (147); 3.6.5. Die Begriffe Veranschaulichung und Darstellung (147); 3.6.6. Die traditionelle Behandlung der Sonderfälle: Multiplikation einer Bruchzahl mit einer natürlichen Zahl und Division durch eine natürliche Zahl (149); 3.6.7. Addition und Subtraktion zeitlich hinter der Multiplikation (Verkettung)? (150); 3.6.8. Die Technik des Rechnens mit Brüchen (150); 3.6.9. Beweise und Einsicht in der Bruchrechnung (151); 3.6.10. Verzicht auf Bruchrechnung?	
4. Dezimalbrüche und Systembrüche	152
4.1. Abbrechende Dezimalbrüche und Systembrüche	152
4.1.1. Abbrechende Dezimalbrüche (152); 4.1.2. Der Abakus (Rechenbrett) (153); 4.1.3. Welche gewöhnlichen Brüche lassen sich als abbrechende Dezimalbrüche schreiben? (153); 4.1.4. Gewöhnliche Brüche in anderen Positionssystemen (154); 4.1.5.	

Systembrüche (155); 4.1.6. Abakus (Rechenbrett) für Systembrüche (157); 4.1.7. Die Übersetzung eines gewöhnlichen Bruches in einen Sechserbruch (157); 4.1.8. Die Übersetzung eines gewöhnlichen Bruches in einen Viererbruch (158); 4.1.9. Eine Vermutung (159); 4.1.10. Die Übersetzung eines gewöhnlichen Bruches in einen Dezimalbruch nach dem Verfahren der schriftlichen Division (159); 4.1.11. Darstellung des Divisionsverfahrens an der Stellentafel (Rechenbrett); 4.1.12. Verwandlung in einen Systembruch durch Abänderung des schriftlichen Divisionsverfahrens (161); Aufgaben 4.1. (162)

4.2. Nichtabbrechende Dezimalbrüche 163

4.2.1. Nicht abbrechendes Divisionsverfahren (163); 4.2.2. Die Definition der Dezimalentwicklung einer Bruchzahl (164); 4.2.3. Eine weitere Analyse des Verfahrens der schriftlichen Division (165); 4.2.4. Der vorzeitige Abbruch einer Dezimalentwicklung (165); 4.2.5. Wann ist eine Dezimalentwicklung abbrechend? (167); 4.2.6. Die Periodizität einer nicht abbrechenden Dezimalentwicklung (168); 4.2.7. Reinperiodische Entwicklungen (169); 4.2.8. Ein abgekürztes Verfahren der schriftlichen Division (169); 4.2.9* Ein Satz über die Periodenlänge reinperiodischer Dezimalentwicklungen (170); 4.2.10. Entwicklungen mit der Periode 9 (172); 4.2.11. Die Verwandlung einer reinperiodischen Dezimaldarstellung in einen Bruch (172); 4.2.12. Gemischtperiodische Dezimalbrüche (174); 4.2.13. Periodenfreie, nicht abbrechende Dezimalentwicklungen (174); 4.2.14. Intervallschachtelungen (175); 4.2.15. Eine didaktische Schlußbemerkung (176); Aufgaben 4.2. (177)

4.3. Nicht abbrechende Systembrüche 177

4.3.1. Die Analogie zu den Dezimalentwicklungen (177); 4.3.2. Die g -adische Entwicklung eines Bruches (176); 4.3.3. Eine weitere Analyse des Verfahrens (181); 4.3.4. Divisionsverfahren in einem anderen Positionssystem (181); 4.3.5. Der vorzeitige Abbruch einer g -adischen Entwicklung (183); 4.3.6. Wann ist eine g -adische Entwicklung abbrechend? (183); 4.3.7. Die Periodizität einer g -adischen Entwicklung (184); 4.3.8. Das abgekürzte Divisionsverfahren (184); 4.3.9. Die Periodenlänge reinperiodischer g -adischer Entwicklungen (184); 4.3.10. Die Entwicklung $(q_0, q_1 \dots q_n \overline{g-1})_g$ (186); 4.3.11. Die Verwandlung einer reinperiodischen g -adischen Entwicklung in einen Bruch (186); 4.3.12. Gemischtperiodische g -adische Entwicklungen (187); 4.3.13. Eine didaktische Schlußbemerkung (188); Aufgaben 4.3. (188)

4.4. Verknüpfungen von Bruchzahlen in dezimaler bzw. g -adischer Darstellung 189

4.4.1. Eine abkürzende Sprechweise (189); 4.4.2. Zurückführung auf gewöhnliche Brüche (189); 4.4.3. Die Verwendung von Stellenwerttafeln bei Dezimalbrüchen (190); 4.4.4. Stellentafeln bei g -adischen Entwicklungen (192); Aufgaben 4.4. (194)

5. Sachrechnen mit ein oder zwei Größenbereichen 195

5.1. Prozentrechnung 195

5.1.1. Der Prozentoperator (195); 5.1.2. Die drei Grundaufgaben zur Prozentrechnung (195); 5.1.3. Einstieg und Stufengang bei der Behandlung der Prozentrechnung (197);

5.1.4. Vorteile der Operatormethode (198); 5.1.5. Andere Auffassungen des Prozentbegriffs (198); Aufgaben 5.1. (198)	
5.2. Zinsrechnung	199
5.2.1. Zinssatz und Zeitfaktor als Operatoren (199); 5.2.2. Die Grundaufgaben der Zinsrechnung (200); 5.2.3. Die Vorteile der Operatormethode (201); 5.2.4. Zinseszinsen (201); Aufgaben 5.2. (202)	
5.3. Die sogenannte Schlußrechnung	203
5.3.1. Die mathematischen Unterschiede zur Prozentrechnung und Zinsrechnung (203); 5.3.2. Das klassische Dreisatzschema (203); 5.3.3. Ein weiteres Beispiel zum klassischen Schema (204); 5.3.4. Die Multiplikationsbedingung für die Abbildung zwischen beiden Größenbereichen (205); 5.3.5. Abbildung zweier Größenbereiche, für welche die Multiplikationsbedingung nicht gilt (206); 5.3.6. Die Definition der Proportionalität (207); 5.3.7. Eine äquivalente Bedingung zur Multiplikationsbedingung (207); 5.3.8. Verschiedene Möglichkeiten zum Ausfüllen einer Wertetabelle (208); 5.3.9. Die Additionsbedingung (209); 5.3.10. Die Linearität einer Funktion (Abbildung) (210); 5.3.11. Eine stillschweigende Voraussetzung bei der Schlußrechnung (210); 5.3.12*. Die eindeutige Bestimmtheit der Abbildung (Funktion) f in kommensurablen Größenbereichen (212); 5.3.13*. Abhängigkeiten zwischen den beiden Linearitätsbedingungen (213); 5.3.14. Die Monotoniebedingung (214); 5.3.15. Situationsskizzen in der sog. Schlußrechnung (215); 5.3.16. Formulierung der Additionsbedingung für Repräsentanten (216); 5.3.17. Die Bedeutung der Situationsskizzen (217); 5.3.18. Was ist in einer Dreisatzaufgabe überhaupt gegeben? (218); 5.3.19. Zur Didaktik der sog. Schlußrechnung in Grund- und Hauptschule bzw. Realschule und Gymnasium (218); 5.3.20. Quotientengleiche Zahlenpaare (221); Aufgaben 5.3. (222)	
5.4. Die Antiproportionalitäten	224
5.4.1. Ein einführendes Beispiel (224); 5.4.2. Der Begriff der Antiproportionalität (224); 5.4.3. Verschiedene Möglichkeiten des Ausfüllens einer Wertetabelle (225); 5.4.4. Die eindeutige Bestimmtheit einer Antiproportionalität in kommensurablen Größenbereichen (226); 5.4.5. Lösung mit Hilfe einer Gesamtgröße (226); 5.4.6. Situationsskizzen (227); 5.4.7. Produktgleiche Zahlenpaare (227); 5.4.8. Eine didaktische Anmerkung (228); Aufgaben 5.4. (228)	
5.5. Der Größenbereich der Proportionalitäten eines kommensurablen Größenbereichs in einen anderen	229
5.5.1. Die Beschreibung einer Proportionalität durch einen Bruch (229); 5.5.2. Umgangssprachliche Namen für Proportionalitäten (231); 5.5.3*. Die Proportionalitäten eines Größenbereichs G_1 in einen Größenbereich G_2 bilden selbst einen Größenbereich (231); 5.5.4*. Nachweis von Bruchrechenregeln (233); Aufgaben 5.5. (236)	